Una nueva visión de la geometría

Felix Klein

Felix Klein

GENIOS MATEMÁTICOS

Una nueva visión
de la geometría

Felix Klein

RBA

© 2016, Roberto Rodríguez del Río por el texto
© 2017, RBA Coleccionables, S.A.U.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Luz de la Mora
Infografías: Alberto Fregenal
Fotografías: Album: 29, 115ad; Archivo RBA: 20, 25, 30, 35, 43, 51ai, 51ad, 51bd, 83, 95, 111, 115bd, 125, 131, 141ai, 141ad, 141b; Dreamstime: 71; Getty Images: 36, 51bi, 115ai; Museo della Scienza e della Tecnologia Leonardo da Vinci, Milán; 75ai, 75ad, 75mi, 75md, 75bi, 75bd; Sylvia Wiegand, Mathematical Association of America, 115bi.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor

ISBN (Obra completa): 978-84-473-8775-5
ISBN: 978-84-473-9067-0
Depósito legal: B 19454-2017

Impreso y encuadernado en Cayfosa (Impresia Ibérica)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO 1 El lenguaje de la simetría 15

CAPÍTULO 2 El programa de Erlangen 39

CAPÍTULO 3 De Múnich a Leipzig 63

CAPÍTULO 4 Gotinga, destino de grandes matemáticos 91

CAPÍTULO 5 Klein y la enseñanza de las matemáticas 121

LECTURAS RECOMENDADAS 151

ÍNDICE 153

Introducción

No es fácil encontrar a lo largo de la historia de las matemáticas ni de la ciencia un genio que reúna en su persona la capacidad de la investigación, la gestión y la organización y que haya tenido, además, un enorme interés por la difusión y la enseñanza de las matemáticas y su relación con las otras ciencias y la técnica. Felix Klein es uno de los ejemplos más importantes de científico con todas estas aptitudes.

Klein vivió en una de las épocas más interesantes de la historia de la matemática, la segunda mitad del siglo XIX y principios del XX. Un período en el que se sentaron las bases y se marcaron las directrices de toda la investigación matemática que siguió en los cien años siguientes. Fue un líder que tenía una visión global de las matemáticas: matemática pura, matemática aplicada y educación matemática. Consiguió que una pequeña ciudad alemana, Gotinga, se convirtiese en un centro modelo para los institutos de investigación matemática que, en muchos casos, imitarían su forma de organización y funcionamiento; un modelo que sigue vigente en los institutos de investigación actuales. El también gran matemático Hermann Weyl dijo de él: «Klein gobernó la matemática como un dios, pero su poder divino provenía de su personalidad, su dedicación, su voluntad de trabajar y su habilidad para conseguir que se hicieran las cosas».

Felix Klein nació en un momento en el que habían aparecido nuevas ideas en la matemática, particularmente en la geometría,

donde se estaba cuestionando la clásica geometría euclídea. A principios del siglo XIX, los matemáticos János Bolyai, Nikolái Lobachevski, Carl Friedrich y Bernhard Riemann habían empezado a desarrollar las geometrías no euclídeas, cambiando el postulado de las paralelas de la geometría de Euclides por otros postulados incompatibles con él. La convicción de que otras geometrías eran posibles llevó, de hecho, a la creación de muy diversas nuevas geometrías, algunas de las cuales tenían naturalezas aparentemente irreconciliables: geometrías hiperbólica, elíptica, proyectiva, diferencial, sintética, etc.

Además, en la primera mitad del siglo XIX, un joven matemático francés que falleció a la edad de veinte años, Evariste Galois, había demostrado que la ecuación algebraica de quinto grado no podía resolverse de la misma forma que las ecuaciones de grados menores, mediante una fórmula con radicales. Para ello, había desarrollado un nuevo concepto y, con él, una nueva teoría, la teoría de grupos, que además de resolver el problema de las ecuaciones algebraicas, tenía implicaciones geométricas que Galois no pudo llegar a ver debido a su muerte prematura. La teoría de grupos y la teoría de Galois se acabarían convirtiendo en el nuevo lenguaje de la simetría. El concepto de grupo unificaba todos los tipos de simetrías que aparecían en geometría y que, más adelante, aparecerían vinculados también a la física.

Felix Klein, junto a su amigo el matemático noruego Sophus Lie, viajó a París para estudiar la nueva teoría de Galois. También, con apenas veinte años, estudió las geometrías no euclídeas recientemente desarrolladas y, con tan solo veintitrés años, fue capaz de hacer uno de esos ejercicios de síntesis que pasan a la historia de la ciencia como hitos. Klein logró relacionar la teoría de grupos con las geometrías a través de la publicación de la memoria que presentó para su ingreso como catedrático de universidad, el *Programa de Erlangen*. Esta publicación, junto con los *Elementos* de Euclides y la disertación de Riemann *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría*, constituyen las tres obras fundamentales para entender la historia de la geometría.

En su programa, Klein propuso una definición de lo que es una geometría: un espacio ambiente, unos objetos dentro de ese espacio y un grupo de transformaciones que dejan invariantes ciertas propiedades geométricas de esos objetos. La idea central del programa es que la geometría no viene determinada por los objetos geométricos que se estudian, sino por el grupo de transformaciones. Por ejemplo, la geometría de Euclides y la geometría analítica de coordenadas no son geometrías distintas, porque tienen el mismo grupo de transformaciones y estudian los mismos objetos, aunque los describan de maneras diferentes. El concepto clave es el «grupo de simetría».

El programa de Erlangen es un ejemplo de cómo Klein se relacionó con la matemática a lo largo de toda su vida. Su forma de entender la matemática concede una enorme importancia a la visión global y a las conexiones entre diferentes áreas, pero sin prestar mucha atención a los detalles o al trabajo que haya que llevar a cabo para sustanciar esta visión. Klein propuso el programa de Erlangen pero realmente no trabajó después en la consolidación de lo expuesto en él. De ello se encargó de una manera concienzuda su amigo Lie, aunque su nombre no esté tan directamente asociado al programa, motivo que ocasionó que, más adelante, llegaran a tener algún conflicto entre ambos.

Erlangen era un lugar demasiado pequeño para Klein. Él era, sobre todo, un profesor, y un maestro necesita de estudiantes, algo que buscó siempre, ya que son esos alumnos los que ayudan a un investigador a formar escuela. De hecho, a lo largo de su vida llegó a dirigir hasta sesenta y tres tesis doctorales, un número muy notable para un matemático de cualquier época y, lo que es más importante, muchos de los nombres de esos matemáticos a los que formó ocupan lugares importantes en los libros de historia de la ciencia. En su búsqueda de esos estudiantes, Klein se trasladó a Múnich, donde tuvo como alumnos a Adolf Hurwitz, Walther von Dyck, Carl Runge, Max Planck, Luigi Bianchi y Gregorio Ricci-Curbastro. Aunque, solo cinco años después consiguió una plaza de catedrático de Geometría en Leipzig, con tan solo treinta y un años.

En Leipzig, Klein dedicó esfuerzos para incrementar la calidad de los estudios de matemáticas y consiguió mejoras sustanciales para los estudiantes de esa disciplina: edificios independientes

para los matemáticos y no integrados en el área de ciencias, salas para seminarios, un laboratorio con maquetas de modelos geométricos, una biblioteca especializada y un Seminario de Matemáticas permanente que, de hecho, funcionaba como un instituto de investigación independiente. Además de sus logros organizativos en el mundo académico, su actividad investigadora entró en el período creativo más intenso. Durante la época de Leipzig siguió aplicando la teoría de grupos a la geometría e investigó sobre relaciones entre la geometría y el álgebra. En particular relacionó las simetrías del icosaedro con las soluciones de la ecuación de quinto grado, algo de lo que dejó constancia en una de las numerosas monografías que publicó a lo largo de su vida. Aunque su campo más importante de investigación fue un determinado tipo de funciones de variable compleja que denominó «funciones automorfas». El estudio de los números complejos se había desarrollado muy recientemente tratando de resolver los mismos problemas algebraicos que acabaron llevando al desarrollo de la teoría de grupos, es decir, intentando resolver ecuaciones algebraicas. Su interés en el campo de la variable compleja y, en particular, en las funciones automorfas le llevó a entrar en contacto con el matemático francés Henri Poincaré. Este era más joven que Klein y poco conocido, pero tenía un enorme potencial y entre los dos surgió una intensa competición por ver quién conseguía antes el resultado más importante. A pesar de que Klein consiguió algún avance significativo, Poincaré acabó superándolo en la cantidad y la calidad de sus resultados. El esfuerzo hizo que Klein sufriera una profunda depresión que lo tuvo casi apartado del trabajo científico durante un año. Después de este suceso, su perfil cambió completamente. Su actividad investigadora de primera línea disminuyó considerablemente, pero eso le llevó a emprender numerosos proyectos en otros frentes.

Después de recuperarse de su enfermedad, consiguió un puesto como catedrático en la ciudad de Gotinga. Klein tenía treinta y cinco años y la plaza en Gotinga suponía para él la máxima aspiración en su carrera profesional. De hecho, fue el lugar donde permaneció hasta que se retiró en 1913, aunque continuó trabajando en su casa hasta el día de su fallecimiento, en 1925.

Gotinga era una universidad con una larga tradición matemática que se remontaba a la época de Gauss y que continuó con matemáticos como Gustav Lejeune Dirichlet, Riemann y uno de los maestros del propio Klein, Alfred Clebsch. A Klein le parecía el lugar ideal para llevar a cabo su gran proyecto de crear un centro de investigación al que acudieran los matemáticos de todo el mundo a formarse y a intercambiar ideas. Un centro que no se limitase al interés por una u otra rama de las matemáticas, sino que integrase la matemática pura y las aplicaciones. Un lugar donde trabajasen juntos físicos y matemáticos y en el que hubiera una estrecha relación con las necesidades de la sociedad, con la industria y con la tecnología floreciente de la época. Y todo ello lo consiguió en muy pocos años, rodeándose de las personas adecuadas. Klein sabía cómo negociar con el poder académico y político y, gracias a sus relaciones con el ministro de Educación, logró atraer a Gotinga al mejor matemático del momento, David Hilbert. Klein y Hilbert formaban un equipo matemático extraordinario. Klein era el hombre de la organización, el que ideaba cursos, iniciaba nuevos proyectos, recaudaba fondos de los industriales alemanes para organizar congresos, o quien lograba que se creara una plaza nueva para traer a Hermann Minkowski o Carl Runge. Hilbert era el hombre de los problemas, quien estaba firmemente convencido que donde había un problema se podría, más tarde o más temprano, encontrar una solución; era el científico que podía a la vez trabajar en los fundamentos de la geometría y la relatividad general, que creaba el lenguaje matemático necesario para expresar la mecánica cuántica o que sentaba las bases del análisis funcional moderno. Gracias al trabajo conjunto de Klein y Hilbert, la revista científica *Mathematische Annalen*, fundada unos años antes por Clebsch, se convirtió en la más importante publicación matemática de la época. Para un matemático de principios del siglo XX, publicar un artículo en la revista de Klein y Hilbert era un mérito muy apreciado para su currículum.

Al mismo tiempo que Klein hizo de Gotinga el lugar ideal para formarse como matemático e investigador, no dejó de interesarse por una de sus principales pasiones: la enseñanza de las matemáticas. Algunos de sus mayores proyectos están relacionados, de

una manera o de otra, con la enseñanza de las matemáticas. En 1895, convenció a colaboradores y colegas de la importancia que tenía en aquel momento preciso de la historia la elaboración de una gran enciclopedia de matemáticas, la «Enciclopedia de Klein», una fuente en la que se recopilasen todas las matemáticas conocidas hasta ese momento.

A partir de 1900, comenzó a interesarse por la formación de los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. Se implicó personalmente en su instrucción, impartiendo cursos y escribiendo manuales como el *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, que hoy en día sigue utilizándose como una referencia clásica en la enseñanza de las matemáticas. Una formación sólida del profesorado era, desde su punto de vista, el paso previo indispensable para acometer cualquier transformación, antes incluso que la modificación de normas o leyes educativas. Klein participó activamente en la reforma de la enseñanza de las matemáticas y, gracias a él, hoy en día todos los estudiantes de ciencias de la mayoría de los países, cuando llegan a la universidad, han estudiado los principios del cálculo diferencial e integral.

Felix Klein vivió en un momento único para la ciencia y supo hacerlo de una manera intensa, su figura es la del gran emprendedor de la ciencia. La forma en la que hoy en día se hacen y entienden las matemáticas o la manera en la que se organiza la investigación en los mejores centros matemáticos del mundo tienen mucho que ver con sus enseñanzas.

1849 El 25 de abril, el 5^2 del 2^2 de 43^2, nace Felix Christian Klein en Düsseldorf, Alemania.

1866 Presenta su tesis doctoral en la Universidad de Bonn bajo la supervisión de Plücker.

1870 Viaja a París con Sophus Lie para estudiar con Camille Jordan. Estalla la guerra franco-prusiana y abandona París.

1871 Ingresa en el ejército pero tiene que abandonarlo por enfermar de tifus. Obtiene una plaza como profesor en Gotinga.

1872 Presenta el *Programa de Erlangen*. Consigue una cátedra en Erlangen.

1875 Se traslada a Múnich, donde comienza a dar clase a grupos de alumnos excelentes, tales como Hurwitz, Von Dyck, Runge, Planck, Bianchi y Ricci. Se casa con Anne Hegel.

1880 Es nombrado catedrático de Geometría en Leipzig. Comienza a desarrollar la teoría de funciones automorfas.

1882 Poincaré comienza a publicar trabajos sobre las funciones automorfas y a rivalizar con Klein. Idea la superficie llamada «botella de Klein».

1883 Sufre una profunda depresión durante más de un año.

1884 Escribe el libro *Lecciones sobre el icosaedro y la solución de ecuaciones de quinto grado*.

1886 Consigue una cátedra de Matemáticas en la Universidad de Gotinga.

1893 Klein participa en el Congreso Internacional de Matemáticos de Chicago e imparte las *Evanston Colloquium Lectures*.

1894 Empieza a trabajar en el proyecto de la enciclopedia de matemáticas.

1895 Logra traer a David Hilbert, que trabajaba en Königsberg, a Gotinga.

1908 En el congreso celebrado en Roma, Felix Klein es nombrado presidente de la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática, ICMI. Se publica la primera parte de *Matemática elemental desde un punto de vista superior*.

1913 Klein se retira pero sigue trabajando y dictando lecciones en su casa.

1914 Comienza la Primera Guerra Mundial, que duraría hasta 1919. Felix Klein trabaja en las *Lecciones sobre el desarrollo de las matemáticas en el siglo XIX*.

1925 El 22 de junio muere en Gotinga (Alemania), a la edad de setenta y seis años.

CAPÍTULO 1

El lenguaje de la simetría

La simetría puede encontrarse en la naturaleza, en el arte, en la ciencia..., allá donde miremos, existe simetría. Así que se necesita una manera de interpretarla y desentrañarla. En matemáticas, la teoría de grupos estudia la forma de entender la simetría y el lenguaje en que está escrita. La creó el matemático francés Évariste Galois y el joven Felix Klein se sirvió de ese lenguaje para reinterpretar la geometría y las matemáticas.

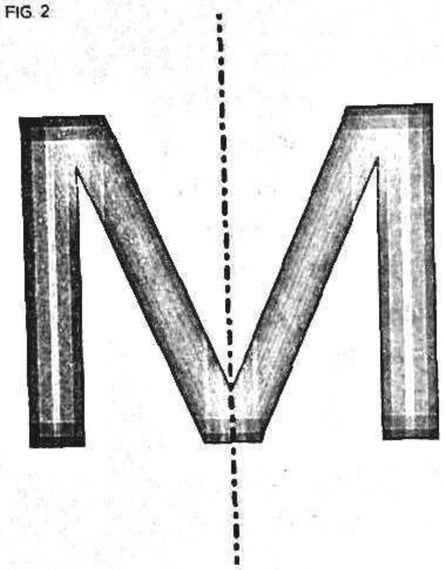
Al girar la página del libro 180 grados de tal forma que lo de arriba esté abajo y lo de abajo esté arriba, puede apreciarse que, si bien las palabras del texto ahora resultan complicadas de leer, porque están del revés, la carta de la reina de corazones (figura 1) queda exactamente igual que antes de girarla. Por esa razón, puede afirmarse que la carta de la reina de corazones tiene simetría. En este caso, corresponde a una «simetría rotacional».

Girar un objeto 180 grados no es la única forma de simetría que puede manifestarse en un objeto. En otros casos, como por ejemplo en la letra M del alfabeto, la simetría se manifiesta de una forma diferente. Ahora, al girar 180 grados la figura 2, el resultado no es el mismo, la figura que resulta es algo parecido a una W. Sin embargo, si en lugar de hacer el giro, se dobla la hoja de papel por la línea de puntos marcada (eje de simetría), la parte de la izquierda de la M pasa al lado derecho y la parte derecha pasa al izquierdo. La letra M quedará exactamente igual que al principio. La letra M tiene una «simetría axial».

La carta de la reina de corazones de la baraja francesa tiene una simetría rotacional.

FIG. 1

FIG. 2



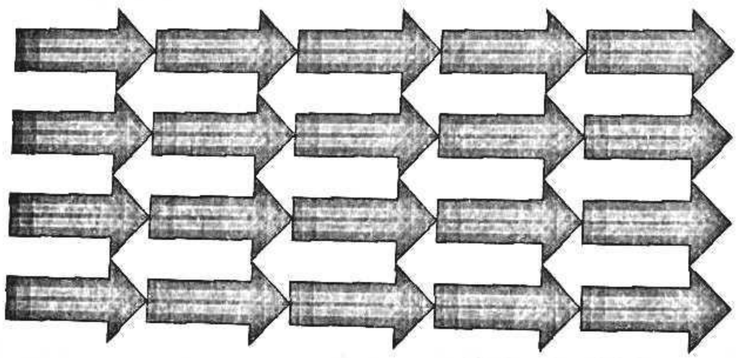
Al doblar la letra M por el eje de simetría se observa que tiene una simetría axial.

También existe simetría en la figura 3, es la llamada «simetría traslacional». Si se traslada la primera flecha en horizontal hacia la derecha, llegará un momento en el que coincidirá con la flecha siguiente. Y también puede trasladarse hacia abajo o incluso en diagonal. Todos estos movimientos se denominan en matemáticas «traslaciones».

La palabra «simetría» procede del latín *symmetrĭa*, la cual a su vez proviene del griego συμμετρία. Su etimología sugiere el significado «la misma medida». Aun así, cuando los griegos se referían a algún objeto como simétrico no solo hablaban de medidas, sino que también lo asociaban con la idea de belleza y pensaban en proporciones armónicas. Asociaban lo simétrico a lo bello y lo asimétrico a lo feo, una idea que aún hoy en día, en parte, se sigue compartiendo. Creía Aristóteles (384-322 a.C.) que las principales formas de la belleza eran el orden, la simetría (la proporción) y la delimitación, las cuales se revelaban especialmente a través de las

La figura se ha formado a partir de la aplicación de distintas traslaciones.

FIG. 3



matemáticas. También Platón (427-347 a.C.), en su obra *Filebo*, escribía:

> La medida y la simetría (proporción) se convierten siempre en belleza y excelencia. No entiendo por belleza de forma una belleza tal como la de los animales o los cuadros, me refiero a líneas rectas y círculos, y a planos y figuras sólidas formadas de ellos mediante varillas giratorias y reglas y medidores de ángulos; de estos afirmo que tienen no solo belleza relativa, como otras cosas, sino belleza eterna y absoluta y proporcionan placeres peculiares [...].

Siglos después, el arquitecto romano Vitruvio (70-25 a.C.), en su obra *Los diez libros de arquitectura*, indicaba que el diseño de una planta dependía de la simetría, cuyos principios debían ser observados con sumo cuidado por el arquitecto.

«Una cosa es simétrica si le podemos hacer algo de tal forma que al acabar tenga el mismo aspecto que antes.»

— Hermann Weyl (1885-1955).

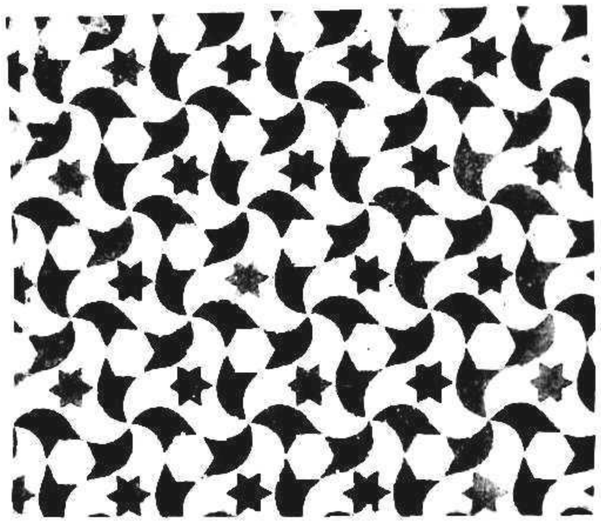
Así pues, la idea de simetría no es un concepto nuevo de la ciencia moderna. Ni tan siquiera es exclusivo de la ciencia. La simetría aparece allá donde miremos; nos rodea. Debido a su conexión con la idea de belleza, aparece en todo tipo de manifestaciones artísticas: pintura, arquitectura, música, decoración, etcétera.

LA TEORÍA DE GRUPOS

Los matemáticos y los científicos de diferentes disciplinas utilizan la teoría de grupos para entender el lenguaje de la simetría. El concepto de grupo es un ejemplo, quizá de los más importantes, de la profundidad que puede llegar a tener el pensamiento abstracto en matemáticas.

SIMETRÍA EN LA ALHAMBRA

La Alhambra de Granada es un conjunto de palacios, jardines y una fortaleza, que fue ocupada, desde el siglo XIII hasta el XV por la dinastía de los nazaríes. Durante este período, el Reino de Granada y la propia Alhambra vivieron una época de esplendor en la cual se construyeron los denominados «mosaicos nazaríes», que pueden contemplarse aún en la actualidad. La Alhambra es uno de los lugares en los que mejor se puede admirar la combinación entre geometría y arte a través de la simetría. En el diseño de los mosaicos se utilizaban polígonos regulares, en muchas ocasiones cuadrados o triángulos equiláteros, que se deformaban para obtener teselas del plano en las que se podían observar diferentes transformaciones geométricas.



Mosaico nazarí de la Alhambra.

Para ejemplificar qué es un grupo y su relación con la simetría se puede partir de un cuadrado de vértices *ABCD* (figura 4). Un cuadrado tiene simetrías axiales y rotacionales, pero en este ejemplo se tienen en cuenta solo estas últimas.

Una rotación que deja al cuadrado como estaba (salvo que los vértices cambian de nombre) consiste en girar el cuadrado un cuarto de vuelta en el sentido de giro de las agujas del reloj. Se puede denominar p a este movimiento. También queda el cuadrado en la misma posición si se gira media vuelta, también en el sentido de las agujas del reloj (aunque daría lo mismo hacerlo en el sentido contrario, lo que es realmente importante es cómo estaba antes de moverlo y cómo queda al final), y este movimiento puede denominarse q. Puede llamarse r a la rotación de tres cuartos de vuelta. Finalmente, si se gira el cuadrado una vuelta completa, el resultado es el mismo que si no se mueve y se deja como estaba. Se denomina e a este «movimiento» especial. Queda así un conjunto de cuatro simetrías (figura 5), que puede expresarse por la letra G.

FIG. 4

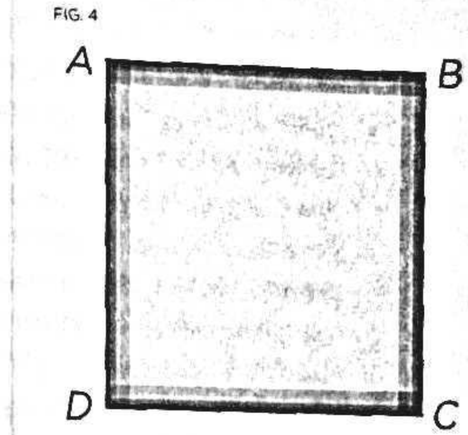
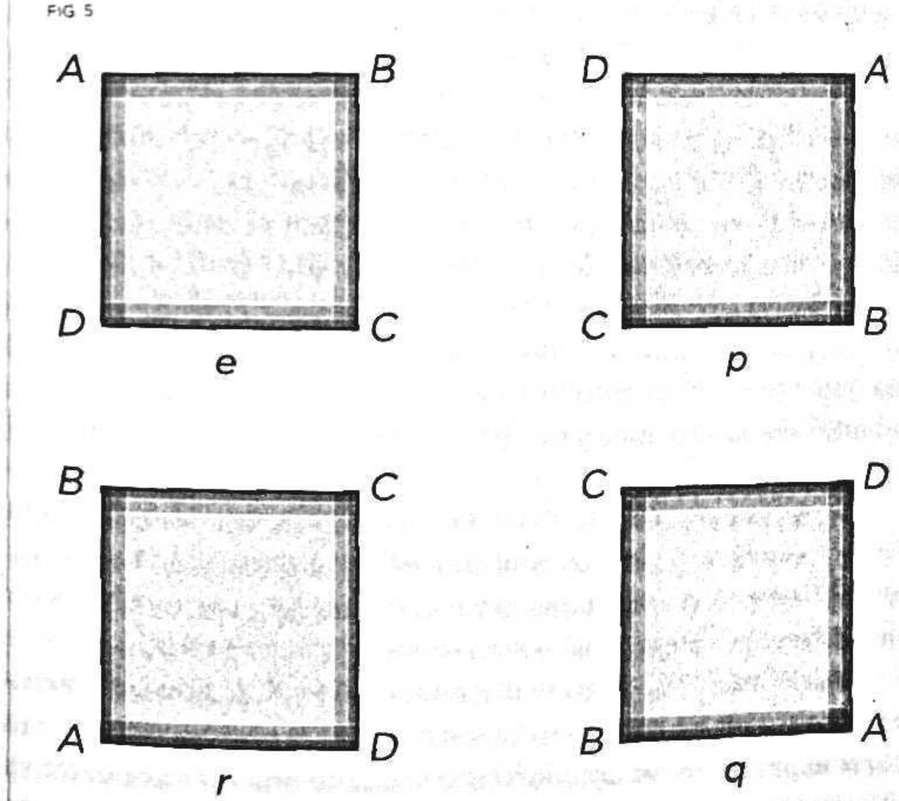


FIG. 5



$$G=\{e,p,q,r\}.$$

Las cuatro simetrías que se han considerado se pueden aplicar, cada una de ellas por separado, pero también pueden darse de dos en dos, una tras otra. Por ejemplo, si quiere aplicarse primero p y después q, se da la instrucción $p\cdot q$, lo que significa que primero se debe realizar un giro de un cuarto de vuelta, p, y después un giro de media vuelta, q. El resultado obtenido es el mismo que aplicar solo r. Es decir, $p\cdot q=r$. Es fácil verificar que cualquier secuencia de dos simetrías de las cuatro de G, esto es, cualquier operación entre dos de los elementos de G, es otro elemento de G. Por eso se dice que la operación que consiste en aplicar, una tras otra, dos de las simetrías es una «operación interna».

Pero esta no es la única propiedad del conjunto G. También es fácil convencerse de que si se aplican dos de las simetrías, por ejemplo $p\cdot q$, y a continuación se aplica r, se obtiene el mismo resultado que si se aplica en primer lugar p y después el resultado de $q\cdot r$. En otras palabras, $(p\cdot q)\cdot r=p\cdot(q\cdot r)$, por lo que se dice que es una «operación asociativa».

El elemento e es especial. Siempre que se empareje con cualquiera de los otros tres elementos, su efecto es dejar las cosas como están. Por ejemplo: $p\cdot e=p=e\cdot p$, o bien, $e\cdot q=q=q\cdot w$. Se dice que G tiene un «elemento neutro». Y, por último, dado cualquiera de los elementos de G, siempre hay otro de tal forma que, al calcular su producto, se obtiene e. En efecto, dado p, con la operación $p\cdot r$ se obtiene el elemento neutro e. Por esto, se considera que r es el «elemento inverso» de p. En otras palabras, dado cualquier elemento, siempre hay otro que deshace lo que hizo el primero.

Son estas propiedades las que hacen de G, con la operación de composición o producto, una estructura interesante. Los matemáticos llaman «grupo» a cualquier conjunto que, dotado de cierta ley de composición, posee estas propiedades.

De este modo, G, junto con la operación que consiste en combinar dos simetrías de tipo rotacional, es un grupo porque al considerar el producto así definido estamos ante una operación interna y asociativa que tiene elemento neutro y para la que cada

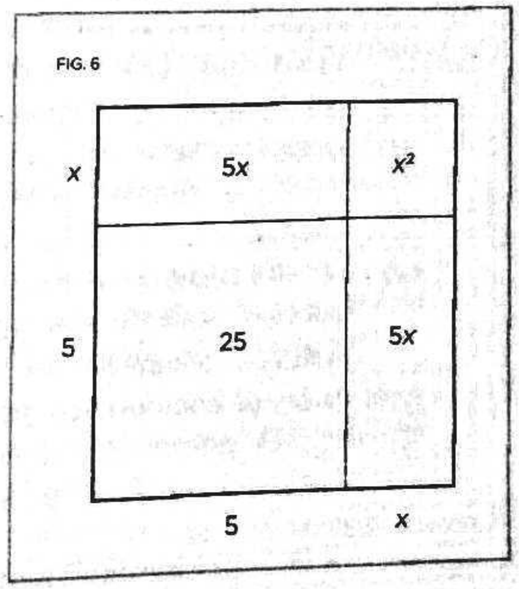
elemento tiene un inverso. La estructura de grupo se puede encontrar en diversas situaciones, no solo en el conjunto de los movimientos que dejan invariante un objeto geométrico. También pueden encontrarse grupos en aritmética, en álgebra, en cristalografía, en la estructura del átomo, etcétera. Y siempre asociados a la idea de simetría.

La denominación de grupo fue utilizada por primera vez por el joven matemático francés Évariste Galois (1811-1832). Galois estaba interesado en resolver un problema que llevaba siglos sin solución: determinar qué ecuaciones algebraicas se pueden resolver mediante una fórmula que dependa exclusivamente de los coeficientes de la ecuación y en la que se utilicen solamente las operaciones habituales de suma, diferencia, producto, división y cálculo de raíces n-ésimas; procedimiento que lleva el nombre técnico de «resolución por radicales» de la ecuación.

Una ecuación de primer grado es una expresión de la forma $ax+b=0$. Resolver la ecuación consiste en encontrar el valor de x que verifique la igualdad anterior. En el caso de la ecuación de primer grado, la solución es bastante fácil de obtener. Por ejemplo, en la ecuación $2x-6=0$, el valor de x que verifica la igualdad es $x=3$. Para el caso general, se puede comprobar que el valor de x que verifica la ecuación $ax+b=0$, es $x=-b/a$, siempre que a sea distinto de cero.

Los babilonios ya conocían algunos problemas que daban lugar a ecuaciones de segundo grado, aunque no conocían un procedimiento general para su resolución. Una ecuación de segundo es una expresión de la forma $ax^2+bx+c=0$, o cualquier expresión que se pueda reducir a la forma anterior. Por ejemplo, la expresión $x^2+10x=39$ es una ecuación que resolvió el matemático persa Al-Juarismi (780-850), quien utilizó una técnica geométrica que consiste en construir un cuadrado como el de la figura 6. El

FIG. 6



cuadrado tiene por lado $x+5$, de manera que tiene de área $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$. Como, según la ecuación, se cumple que $x^2 + 10x = 39$, se deduce que $(x+5)^2 = 39 + 25 = 64$. Se concluye que $x = 3$.

A pesar de lo ingenioso del método de Al-Juarismi, su procedimiento, como ya ocurriera con el de los babilonios, sirve para ejemplos concretos, pero no resuelve el problema de una forma general. La formulación definitiva de la solución de la ecuación de segundo grado en la forma en que la conocemos hoy en día,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

no llegó hasta que el matemático francés François Viète (1540-1603) empezó a utilizar las letras para representar las cantidades que aparecían en las ecuaciones. De esta forma, se pudieron formalizar y clarificar procedimientos de resolución que resultaban oscuros.

La ecuación de tercer grado, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, fue resuelta por primera vez por los matemáticos italianos Scipione del Ferro (1465-1526) y Niccolò Fontana, *Tartaglia* (1499-1557), aunque la mantuvieron en secreto para ganar competiciones y apuestas entre algebristas, que estaban muy de moda en la Italia de la época. Más tarde, Tartaglia reveló el procedimiento a Gerolamo Cardano (1501-1576), bajo la promesa de mantenerlo en secreto, promesa que Cardano no cumplió, y finalmente publicó la deducción en su obra *Ars Magna*, en 1545. En realidad, la fórmula que publicó Cardano y que habían deducido Del Ferro y Tartaglia no era la solución de la ecuación general de tercer grado, sino un caso particular, $x^3 + px + q = 0$, al que se puede reducir el caso general mediante un cambio de variable. La fórmula para resolver esta ecuación de tercer grado, utilizando radicales, es

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Y se denomina «fórmula de Cardano».

ÉVARISTE GALOIS, EL MATEMÁTICO ROMÁNTICO

Évariste Galois (1811-1832), con veinte años de edad, se había citado en un duelo de honor con un activista político llamado Pescheus d'Herbinville la mañana del 30 de marzo de 1832. Galois recibió un disparo en el abdomen y fue abandonado, aún con vida. Más tarde, alguien lo recogió y lo llevó a un hospital cercano, donde falleció al día siguiente, en presencia de su hermano menor. Galois se formó en el Lycée Louis-le-Grand, un prestigioso centro de enseñanza secundaria y preparatorio para la universidad a la edad de doce años y sus dos primeros años se desarrollaron con bastante éxito. Sin embargo, al tercer año, su trabajo de retórica no fue bien calificado y Galois fue obligado a repetir curso. No obstante, durante ese año de repetición empezó a verse atraído por las matemáticas, gracias a un nuevo profesor, Hippolyte Vernier. Galois intentó ingresar en dos ocasiones en la Escuela Politécnica de París, pero fracasó en ambas. Al final, estudió en la Escuela Normal. Después de su primer año, fue expulsado por cuestiones políticas. Galois escribió a dos matemáticos, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) y Siméon Denis Poisson (1781-1840) acerca de sus resultados matemáticos. Cauchy no llegó a emitir ningún informe sobre el trabajo de Galois en sus comunicaciones y Poisson encontró los escritos de Galois incomprensibles y los devolvió a su autor. Galois se alistó en el ejército y fue encarcelado por sus ideas. En prisión se dedicó a emborracharse, participar en reuniones republicanas y escribir textos matemáticos. Después de obtener una especie de libertad condicional, se vio envuelto en un asunto de amoríos que le llevó a retarse en duelo. La noche anterior al día de su muerte, estando convencido de que iba a morir, se dedicó a escribir cartas a sus amigos, algunas de las cuales contenían ideas sobre su trabajo de matemáticas. Se cuenta que sus últimas palabras estuvieron dirigidas a su hermano Alfred, para infundirle ánimo: «No llores, necesito todo mi valor para morir con veinte años».

La fórmula para resolver la ecuación de cuarto grado fue obtenida por un alumno de Cardano, Ludovico Ferrari (1522-1565). El paso siguiente era evidente, intentar resolver la ecuación de quinto grado, más aún, encontrar un procedimiento general que permitiese resolver una ecuación algebraica de cualquier grado. Sin embargo, a pesar del intento de generaciones de matemáticos, no se pudo encontrar ninguna fórmula ni procedimiento que condujese a la solución de la ecuación de quinto grado. No fue hasta 1824 cuando el matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829) demostró que la ecuación general de quinto grado no podía resolverse con una fórmula análoga a las anteriores, es decir, una que utilizase únicamente operaciones aritméticas básicas y radicales. Pero debido a su temprano fallecimiento, Abel no había resuelto un problema aún más general: dada una ecuación de quinto grado o superior, ¿se puede resolver mediante una fórmula? ¿Se puede encontrar un procedimiento general para decidir cuándo las ecuaciones de quinto grado o superior son resolubles? Este tipo de preguntas han sido habituales en la investigación matemática de todos los tiempos. Antes de preguntarse por cuál es la solución de un problema, en muchas ocasiones hay que intentar pensar si hay algún procedimiento que permita decidir si el problema tiene o no solución.

Con la finalidad de responder a la cuestión de la resolubilidad de las ecuaciones de grado superior a cuatro, Galois introdujo el concepto de grupo, y no solo eso, sino que creó una rama de la matemática completamente nueva y que hoy lleva su nombre, la «teoría de Galois», en la que el concepto central es el de grupo de Galois asociado a una ecuación algebraica. Dicho grupo es el que va a determinar si la ecuación puede resolverse mediante una fórmula o no. Gracias a la idea de grupo, la simetría se convierte en el concepto más importante de la teoría de ecuaciones algebraicas y el grupo de Galois de una ecuación es la forma de estudiar las propiedades simétricas de una ecuación. Es importante observar que Galois desconocía la contribución de Abel al problema de la quíntica, por lo que realizó su trabajo con técnicas diferentes y de manera completamente independiente. Además, Abel en investigaciones posteriores contribuyó al problema más profundo y más general que resolvería Galois, con un resultado parcial, en el que

garantizaba que para cierto tipo muy especial de ecuaciones algebraicas (llamadas «ecuaciones abelianas») la solución por radicales era posible. El adjetivo «abeliano» como sinónimo de «conmutativo» en teoría de grupos se creó en honor a Abel, precisamente por esta contribución.

Galois no vivió lo suficiente como para ver el alcance que su idea de grupo iba a desempeñar para la ciencia. En 1870, mucho después de la muerte de Galois, un joven alemán, Felix Klein, que tenía entonces veintiún años, caminaba por las calles de París junto con su amigo noruego Sophus Lie (1842-1899). La razón por la que estos dos jóvenes se encontraban en París era precisamente la de empaparse de las nuevas y revolucionarias ideas matemáticas del malogrado Galois. Klein y Lie eran alumnos del matemático francés Camille Jordan (1838-1922), quien los introdujo en la nueva teoría de grupos creada por Galois. Es probable que Felix Klein no pensase en aquellos momentos en que iba a convertirse en el responsable de una nueva visión de la geometría. Klein reconoció que la geometría, la idea de simetría y la teoría de grupos estaban íntimamente unidas, lo que iba a suponer una ruptura con el punto de vista tradicional de la geometría hasta ese momento. La simetría, a través de la idea de grupo creada por Galois, se iba a convertir en el nuevo lenguaje de la geometría.

LOS PRIMEROS AÑOS DE FELIX KLEIN

Felix Christian Klein nació en 1849 en Düsseldorf, sede del gobierno provincial de la Renania prusiana y un importante centro industrial de Prusia. Düsseldorf, a diferencia de otras partes de Renania, era de mayoría protestante, religión profesada por la familia Klein. Su padre, Caspar Klein, era secretario del gobernador provincial y de ideas extremadamente conservadoras. Después de recibir una instrucción elemental a cargo de su madre, Elise Klein, Felix ingresó en un colegio privado a la edad de seis años y lo dejó dos años y medio más tarde para ingresar, en 1857, por expreso deseo de su padre, en el *Gymnasium* de Düsseldorf. Allí, de acuerdo con

el modelo de educación prusiana de la época, se prestaba mucha atención a la formación en cultura clásica, sobre todo en latín y griego, y menos atención a la formación matemática. No obstante, a partir de las soluciones de Felix Klein a los problemas de algunos exámenes finales, se puede deducir que su formación matemática era bastante aceptable y que debió de contar con profesores de matemáticas competentes, pero que no eran precisamente del *Gymnasium*.

Durante toda su vida Klein tuvo una muy mala opinión de la formación que recibió en el *Gymnasium*, según describiría él mismo años después:

> Lo que esta educación, puramente filológica, podía aportarme era prácticamente nada relacionado con mi interés por las disciplinas científicas, dado que, por otra parte, las clases de matemáticas, que yo podía seguir con facilidad, tenían un marcado carácter formal.

De su educación matemática durante este período se encargaron amigos de la familia además de su propio esfuerzo personal.

A la edad de dieciséis años, Klein ingresó en la Universidad de Bonn. Quería ser físico. Al poco tiempo llamó la atención de Julius Plücker (1801-1868), que en ese momento era el jefe del Departamento de Física y Matemáticas de la universidad de Bonn. De hecho, en 1866, lo convirtió en su asistente en el laboratorio de física. Plücker había trabajado muchos años en física, pero sus intereses en el momento en el que conoció a Klein empezaron a inclinarse hacia la geometría. En 1868 Plücker publicó el primer volumen de un trabajo sobre geometría que llevaba por título *Nueva geometría del espacio*, basado en la consideración de la línea recta como objeto básico del espacio. En su trabajo, Plücker utilizó la idea de la cuarta dimensión. Puede que esta sea una de las primeras veces en la historia de la ciencia en la que se usó un espacio de cuatro dimensiones, un concepto ampliamente utilizado años después en física y matemáticas.

Plücker falleció ese mismo año y no pudo encargarse de la publicación del segundo volumen de su obra, trabajo que tuvo que asumir Felix Klein. Tenía diecinueve años y había reorientado su

Felix Christian Klein nació el día 25 de abril de 1849 o, como a él le gustaba decir, el día 5^2 del mes 2^2 del año 43^2, tres cuadrados perfectos de números primos.

formación hacia las matemáticas, aunque nunca perdió el interés por las aplicaciones a la física. Plücker ejerció una influencia muy importante en los trabajos posteriores de Klein, a pesar del poco tiempo que pudo pasar con él.

LA FORMACIÓN DE UN MATEMÁTICO

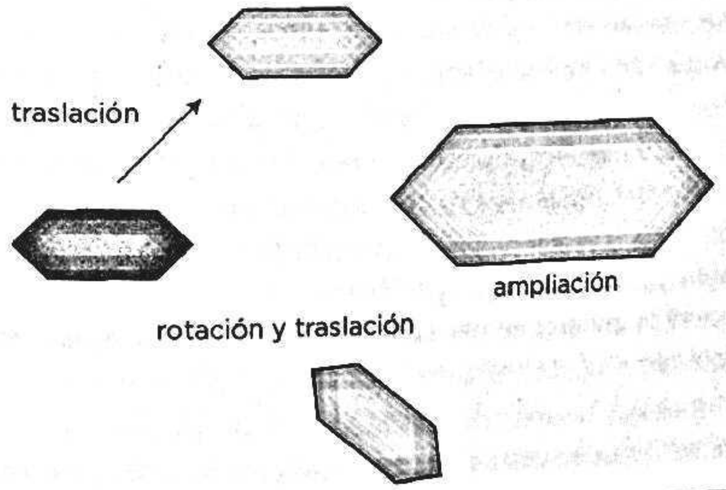
Después del fallecimiento de Plücker, Klein perdió su puesto de asistente del laboratorio de física en la Universidad de Bonn, aunque de inmediato fue invitado a Gotinga por Alfred Clebsch (1833-1872). Clebsch era un joven e influyente profesor de treinta y cinco años que acababa de llegar a la universidad con la intención de convertir Gotinga en un centro de investigación matemática que pudiera competir con Berlín. El primer encargo que recibió Klein de Clebsch fue precisamente completar la edición del segundo volumen de la memoria de geometría que su anterior maestro había dejado sin acabar. El minucioso estudio que llevó a cabo Klein para la publicación del trabajo que había iniciado Plücker le sirvió como inspiración de su primera serie de artículos independientes, contribuyendo a su desarrollo como matemático.

JULIUS PLÜCKER: FÍSICA Y GEOMETRÍA

Julius Plücker (1801-1868) era un geómetra y un físico. El Plücker geómetra estaba firmemente convencido de la importancia de las aplicaciones de las matemáticas a la física y el Plücker físico estaba convencido de que la física era una fuente inagotable de nuevos problemas matemáticos. Trabajó en magnetismo, electrónica y física atómica. Hizo importantes descubrimientos que ayudaron a la invención del tubo de rayos catódicos. Y todo esto a pesar de que era una persona con poca destreza experimental, pero con una profunda intuición para los principios físicos. En cuanto a la geometría, realizó importantes aportaciones a la geometría analítica. Recibió la medalla Copley de la Royal Society de Londres en 1866, por sus aportaciones a la geometría analítica, al magnetismo y al análisis espectral. A pesar del reconocimiento internacional de su trayectoria investigadora, no contó con reconocimientos similares en Alemania.

INVARIANTES

Un «invariante» es una propiedad que poseen cierta clase de objetos matemáticos que no cambia cuando se aplican a esos objetos ciertas transformaciones. El concepto de invariante aparece en muchas ramas de la matemática, tales como la geometría, la topología o el álgebra. En geometría, los ángulos y las proporciones entre las distancias son invariantes bajo transformaciones que supongan ampliaciones, rotaciones o traslaciones. Por ejemplo, se puede transformar un hexágono mediante una traslación, una ampliación (que en geometría se denomina «homotecia») o el movimiento que resulta de una rotación seguida de una traslación, y el resultado son tres nuevas figuras que mantienen los ángulos y las proporciones entre las longitudes de los lados. Por supuesto, la simetría es una forma de invariancia.



Clebsch fue el segundo gran maestro de Klein: de él aprendió el concepto de «invariante geométrico», ya que Clebsch trabajaba en la teoría de invariantes que habían iniciado matemáticos británicos como George Boole (1815-1864), Arthur Cayley (1821-1895) y James Josep Sylvester (1814-1897).

«Un matemático no es digno de ese nombre
si no es un poco poeta.»

— KARL WEIERSTRASS, CARTA A SOFIA KOVALEVSKAYA, 1883.

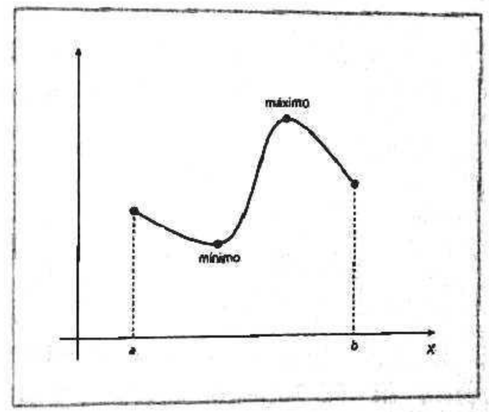
Nada más llegar a Gotinga, en 1868, Alfred Clebsch, junto con Carl Neumann (1832-1925), habían fundado la prestigiosa revista científica *Mathematische Annalen* (*Anales de Matemáticas*), una publicación que llegó a tener como editores posteriormente al propio Klein y a David Hilbert (1862-1943), que sigue publicándose en la actualidad siendo una de las revistas científicas con más prestigio dentro de la comunidad matemática. Es interesante destacar que en el primer volumen de la revista apareció un artículo de Camille Jordan, en francés, titulado «Commentaire sur Galois», que influyó de manera determinante en las decisiones que emprendió Felix Klein.

A pesar de que el ambiente en Gotinga, con Clebsch, un investigador joven y con nuevas ideas que estaba formando un nuevo equipo, era muy propicio para la formación de Klein, este sintió la necesidad de seguir viajando para conocer diferentes escuelas y corrientes matemáticas. Así pues, en contra de las recomendaciones de Clebsch, que pensaba que de esta manera perdía a un excelente colaborador, Klein decidió viajar a Berlín en el otoño de 1869 para participar en los seminarios que organizaba Karl Weierstrass (1815-1897). Los participantes en estos seminarios daban charlas de temas que podían elegir ellos mismos.

El paso por Berlín resultó enormemente gratificante para Klein, ya que entró en contacto con otros jóvenes matemáticos que tuvieron una gran influencia en su trabajo posterior. Sin embargo, no resultó nada amable su contacto con Karl Weierstrass quien era la gran autoridad matemática de Berlín y, probablemente, de toda

EL NACIMIENTO DEL ANÁLISIS MODERNO

Karl Weierstrass, uno de los padres del análisis, sentó las bases del análisis matemático moderno, con lo que logró poner cimientos a un enorme edificio que desde tiempos de Newton y Leibniz venía utilizando ideas, a veces vagas, a veces poco rigurosas. Fue el primer matemático que definió formalmente los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función, gracias a los cuales consiguió dar una expresión definitiva a la demostración de numerosos teoremas que se conocían y usaban desde hacía largo tiempo, tales como el teorema del valor medio o el teorema de Weierstrass sobre existencia de extremos absolutos. Las definiciones y demostraciones de Weierstrass son las que siguen utilizándose en la actualidad; en particular, el teorema de Weierstrass que afirma que una función continua *f* en un intervalo cerrado [*a*, *b*] siempre alcanza máximo y mínimo absoluto en ese intervalo.
Karl Weierstrass; no tuvo una formación inicial formal en matemáticas y las estudió por su cuenta. Cursó sus estudios en centros no universitarios y consiguió puestos de profesor en escuelas y asistía a conferencias en la universidad, con lo que comenzó a publicar trabajos gracias a los que consiguió reconocimiento, hasta el punto de recibir, en 1854, el título de doctor por la Universidad de Königsberg. En 1864 logró una plaza de profesor en la Universidad de Berlín, de la que llegó a ser catedrático y fundador de una importante escuela de matemáticos.



Teorema de Weierstrass.

Alemania en aquel momento. Weierstrass tenía una forma de entender las matemáticas muy diferente de la forma en la que Klein las entendía en aquel momento y también durante el resto de su vida. Klein era conocido por utilizar en sus clases y en sus presentaciones gráficos e ideas físicas con bastante frecuencia, algo que para alguien con el espíritu de Weierstrass era una pérdida imperdonable de rigor matemático. Esto hizo que entre Weierstrass y Klein nunca existiera una buena comunicación ni entendimiento.

Hay quien cree que existen dos tipos de matemáticos, opuestos en muchos aspectos: los matemáticos «algebristas», cuya forma de entender la matemática tiene que ver con la lógica, las fórmulas y los algoritmos, y los matemáticos «físicos o geométricos», que no entienden las matemáticas si no es a través de ideas gráficas, dinámicas y visuales. La existencia de estos dos tipos de tendencias, a veces irreconciliables, y la de matemáticos que, si bien tienen habilidades de los dos tipos, siempre tienen una de las dos personalidades como dominante, fue expresada en una conferencia por el matemático Hermann Weyl. En particular, mencionaba a Klein y a Bernard Riemann (1810-1893) como ejemplos de matemáticos geométricos, y a Weierstrass como ejemplo de matemático algebrista. También mencionaba otro ejemplo de dúo matemático inseparable históricamente: Newton y Leibniz. Newton, por razones obvias, es el matemático físico y Leibniz es el algebrista. No se conoce si pudieron ser estas las razones del desencuentro de Klein y Weierstrass, pero lo que sí es cierto es que sus maneras de hacer y entender la matemática eran completamente opuestas.

DE BERLÍN A PARÍS

Pero quizá lo más interesante del paso de Klein por Berlín fue la oportunidad de conocer y entablar amistad con dos jóvenes matemáticos que participaban junto con él en los seminarios organizados por Weierstrass. El primero de ellos, el austríaco Otto Stolz (1842-1905), fue quien por primera vez habló a Klein de las geometrías no euclídeas, de las que se hablará más adelante. Klein ya había leído los trabajos de Arthur Cayley sobre geometría proyectiva y cuando Stolz, durante el invierno de 1869-70, le habló de los trabajos en geometría no euclídea de Nikolái Lobachevski (1792-1856) y János Bolyai (1802-1860), inmediatamente tuvo la impresión de que debía haber una conexión entre las dos ideas. El segundo fue el joven matemático noruego Sophus Lie, cuyo encuentro quedó descrito del siguiente modo por el propio Klein:

El evento más importante de mi estancia en Berlín fue, hacia finales de octubre, en una reunión de la Sociedad Matemática de Berlín, mi encuentro con el noruego Sophus Lie. Nuestros trabajos se habían desarrollado desde diferentes puntos de vista pero habían acabado en las mismas cuestiones, o al menos afines. Nos reuníamos todos

KLEIN Y LIE

Sophus Lie

Felix Klein y Sophus Lie estudiaron y desarrollaron la teoría de grupos y ambos la llevaron por caminos diferentes. Klein acabó aplicándola a una nueva concepción de la geometría y Lie desarrolló el concepto de «grupos continuos» (dentro de los cuales se encuentran precisamente los grupos de Lie) intentando aplicar los grupos al estudio de simetrías en las ecuaciones diferenciales (ecuaciones en las que intervienen derivadas y que son utilizadas ampliamente como modelos en ciencia). Fueron, por tanto, una pareja científica perfecta y complementaria en ese sentido. Aunque Klein era el más joven, fue quien tomó la iniciativa de viajar a París y a Londres y fue también quien propuso a Lie, años más tarde, que se trasladara de Noruega a Alemania, a Leipzig. El liderazgo de Klein fue asumido por el carácter modesto y bondadoso de Lie, aunque en algún momento se sintiera menospreciado. En 1892 estalló entre ellos una disputa que tuvo que ver, en parte, con la sensación por parte de Lie de que su colaboración en el *Programa de Erlangen* no había sido reconocida. En 1893, Lie escribía: «No soy discípulo de Klein, ni tampoco es el caso inverso, aunque esto podría acercarse más a la verdad». No era la primera, ni la última vez, que se dieron disputas entre matemáticos y científicos que han trabajado, o colaborado incluso, en el desarrollo de teorías. Recuérdese la agria e histórica disputa entre Newton y Leibniz por la invención del cálculo. No obstante, no es esto lo más importante, sino que el pensamiento científico es siempre fruto de la suma de esfuerzos.

SOPHUS LIE Y EL PREMIO ABEL DE MATEMÁTICAS

John Forbes Nash.

En 1895, el químico e ingeniero sueco Alfred Nobel (1833-1896) dejó escrito en su testamento que donaba gran parte de su fortuna para premiar a las personas que contribuyesen de manera sobresaliente cada año en los campos de la literatura, medicina, física, química y de la paz. Son los conocidos como premios Nobel. Más adelante, también se instituyó un premio Nobel de Economía. Sin embargo, aun siendo Alfred Nobel una persona muy interesada en la ciencia, no creó un premio para los matemáticos. Existe una leyenda, con poco fundamento histórico, que afirma que la mujer de Alfred Nobel tuvo una aventura con el matemático Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) y, como castigo, Nobel decidió excluir a los matemáticos de sus premios. Lo más probable es que a Nobel no le interesasen mucho las matemáticas. Cuando se supo que Nobel no pensaba premiar a los matemáticos, Sophus Lie intentó por todos los medios conseguir apoyo internacional para establecer un premio Abel que se otorgaría cada cinco años al trabajo excepcional de algún matemático. A pesar de que, en un principio, Lie consiguió un enorme apoyo de varios centros matemáticos a su iniciativa, su fallecimiento en 1899 hizo que la iniciativa fuera perdiendo peso. Con motivo del centenario del nacimiento de Abel, en 1902, el rey Óscar II de Noruega intentó retomar la idea de crear un premio en honor a Abel. Varios matemáticos se encargaron de elaborar unas normas y unos estatutos, pero la disolución de la unión entre Suecia y Noruega en 1905 acabó con este nuevo intento. Finalmente, en 2003, y después de que hubieran pasado más de cien años desde que Sophus Lie intentase hacer justicia con el gran matemático Niels Hendrik Abel, fallecido a los veintiséis años debido a una tuberculosis y en la más absoluta indigencia, se concedió el primer premio Abel al matemático francés Jean-Pierre Serre (n. 1926). Desde entonces se viene concediendo el premio, dotado con 770 000 euros, una cantidad similar a la de los premios Nobel, a matemáticos que hayan realizado un trabajo excepcional. Entre los premiados se encuentran John Forbes Nash (1928-2015), que ya había obtenido el premio Nobel de Economía, y el matemático británico Sir Andrew Wiles (n. 1953), por su demostración del último teorema de Fermat.

los días y manteníamos charlas para intercambiar ideas. Nuestra amistad creció desde el principio, ya que nuestras ideas en geometría no encontraban mucha aceptación en nuestro entorno.

Es evidente que Klein se estaba refiriendo al ambiente matemático que se respiraba en Berlín, que empezaba a resultarle asfixiante. Animado por Clebsch, que tenía contactos con Camille Jordan, de París, cuyos trabajos ya conocía Klein, decidió emprender un nuevo viaje junto con su amigo Lie. Los planes de Klein y Lie eran ir a París a estudiar con Jordan y, después, viajar a Inglaterra con la intención de conocer mejor los trabajos de Arthur Cayley. Klein intentó conseguir apoyo económico para su viaje a través del Ministerio de Educación y Asuntos Culturales en Berlín, pero la respuesta oficial que obtuvo fue: «No tenemos ninguna necesidad de aprender de las matemáticas francesas ni inglesas». Esta nota, sobre todo en lo que se refiere al malestar con Francia, parecía ser un presagio de la guerra franco-prusiana que estaba a punto de comenzar y que truncaría el plan de viaje de Klein.

A pesar de la respuesta oficial que recibió, Klein y su amigo Lie viajaron a París en el verano de 1870. Se alojaron en el mismo lugar, en habitaciones que estaban juntas y siguieron hablando y trabajando diariamente. Se pusieron en contacto con Jordan, que había publicado el *Traité des substitutions et des équations algébriques*, la primera obra dedicada a la teoría de Galois. También contactaron con el matemático francés Jean Gaston Darboux (1842-1917), quien había introducido el concepto que hoy lleva su nombre, la integral de Darboux, en un trabajo publicado ese mismo año.

Sin embargo, el 19 de julio de 1870 se declaró la guerra franco-prusiana. El desencadenante de la guerra fue un incidente con un telegrama mal redactado y peor entendido. El rey de Prusia, Guillermo I, y el embajador francés se habían reunido en el balneario de Bad Ems, donde Guillermo I se había negado a las peticiones del embajador francés para que Prusia no apoyase la candidatura de un Hohenzollern al trono de España, algo que era muy perjudicial para los intereses franceses. A pesar de que la negativa de Guillemo I tuvo lugar en un tono bastante cortés, cuando este in-

formó a su canciller, Otto von Bismarck (1815-1898), mediante un telegrama, Bismarck escribió otro en el que relataba el encuentro de manera que parecía que el rey había humillado al embajador francés. La situación de tensión entre Francia y Prusia desencadenó en la guerra, que fue declarada por Francia el día 19 de julio.

Klein era prusiano, así que no tuvo más opciones que abandonar de inmediato París y volver a Berlín. Lie pensó que la guerra no tenía nada que ver con él y decidió quedarse en Francia y aprovechar para viajar. A Lie le encantaban las caminatas por el campo y la montaña y se propuso intentar llegar caminando hasta Italia, atravesando toda Francia y los Alpes. Pero solo pudo llegar hasta Fontainebleau. Su aspecto nórdico, sus escasos conocimientos de francés y los incomprensibles artículos matemáticos, que debieron parecer mensajes cifrados, que llevaba consigo fueron interpretados por los oficiales franceses como claros indicios de que se trataba de un espía alemán, por lo que fue detenido. Gracias a la intercesión de Darboux, fue liberado al cabo de un mes, aunque pudo aprovechar su estancia en la prisión para repasar alguno de los problemas matemáticos en los que se encontraba trabajando. Finalmente, Lie pudo viajar a Italia y volver a la Universidad de Christiania (hoy Oslo) desde donde continuó colaborando con Klein.

CAPÍTULO 2

El programa de Erlangen

Los *Elementos* de Euclides fueron la única referencia para la geometría a lo largo de dos milenios. Esto se empezó a cuestionar a principios del siglo XIX con la aparición de una diversidad de geometrías, aunque estas no gozaban de la misma consideración que la geometría euclídea. Felix Klein consiguió, con su programa de Erlangen, establecer un marco en el que todas las geometrías quedaban caracterizadas mediante el concepto «grupo de simetría».

La palabra «geometría» procede de dos palabras griegas: γῆ (geo), que significa «tierra» y μετρον (metron), «medida». Y, en efecto, uno de los primeros usos de la geometría fue en la agrimensura, tanto en el antiguo Egipto como en Babilonia. No obstante, las fuentes que han llegado hasta la actualidad sobre los primeros indicios de la geometría a lo largo de la historia son bastante dispersas y muchas se han perdido, aunque se tenga referencia de ellas a través de fuentes secundarias.

Tal es el caso de los trabajos de Eudemo de Rodas (350-290 a.C.), a quien se puede considerar el primer historiador de la ciencia y la matemática. Se le atribuyen tres textos, uno sobre la historia de la aritmética, otro sobre la historia de la astronomía y un tercero sobre la historia de la geometría.

Se sabe que ya en los textos de Eudemo aparecían referencias a las obras de los matemáticos griegos Tales de Mileto (624-547 a.C.) y Pitágoras de Samos (569-475 a.C.), que corresponden a los nombres de dos de los teoremas más conocidos de las matemáticas. Estos teoremas, además de toda la geometría conocida hasta la época, aparecen en el libro de matemáticas más célebre de todos los tiempos, los *Elementos*, escrito hacia el año 300 a.C. por el matemático griego Euclides de Alejandría (325-265 a.C.).

Euclides construyó toda su geometría a partir de cinco «postulados» que se suponen ciertos, sin demostración. Un postulado

es una proposición que quizá no sea evidente por sí misma, pero que se acepta, como una regla del juego.

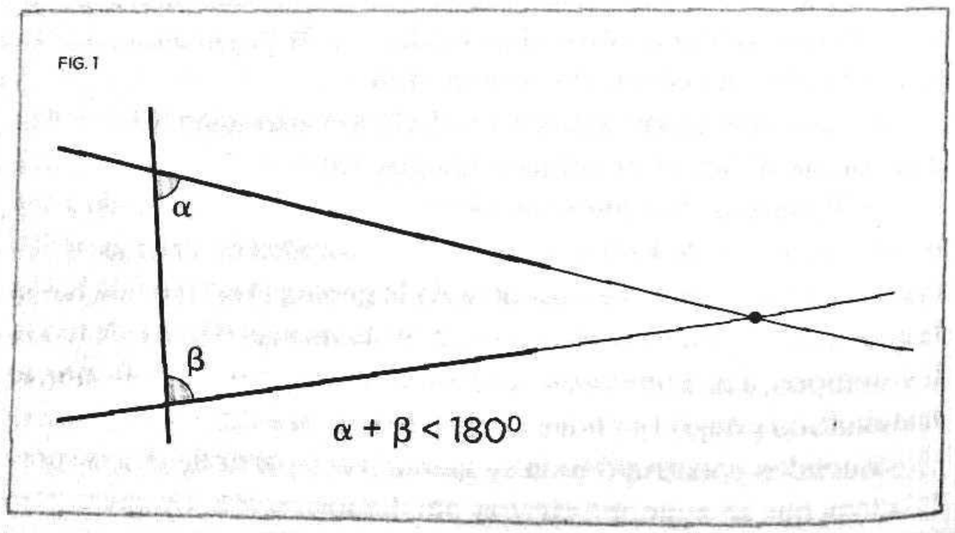
Los cinco postulados de Euclides son los siguientes:

I. Por dos puntos distintos se puede trazar solo una línea recta.
II. Un segmento rectilíneo siempre puede ser prolongado.
III. Dado un centro y un radio, con ellos se puede trazar una única circunferencia.
IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
V. Si una línea recta corta a otras dos rectas de forma que los ángulos interiores a un mismo lado de la primera recta son menores que dos rectos, las dos líneas rectas, si se prolongan indefinidamente, acaban cortándose en un punto.

Mientras que los primeros cuatro postulados pueden ser fácilmente comprobados, el quinto ofrece más dificultades. En realidad, solo pueden dibujarse segmentos, no rectas completas, aunque puedan prolongarse indefinidamente. Si se prolongan dos líneas rectas y se cortan, se puede afirmar que no son paralelas (figura 1); pero si se prolongan dos líneas rectas más y más y no se cortan, no se puede estar seguro de si se cortan o no.

El quinto postulado llamó la atención inmediatamente porque era distinto de los demás. No era tan conciso como el resto y, aun-

Quinto postulado de Euclides.



LOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

El matemático y filósofo Bertrand Russell (1872-1970) opinaba que los *Elementos* eran una de las obras más grandes jamás escrita. Comienza con una definición: «Un punto es lo que no tiene partes», y continúa a través de trece libros y 465 proposiciones mediante los cuales se explica, de una forma monótona, sin ningún tipo de motivación ni discusión previa o posterior, toda la geometría y la matemática que se conocía en la época. No aparece en ningún momento nombre de persona alguna relacionada con las matemáticas que se presentan. Solo preocupaba a Euclides que cada proposición, cada teorema, cada demostración, estuviera fundamentada lógicamente en las anteriores. A pesar de que los *Elementos* se han editado miles de veces desde la invención de la imprenta y de su influencia en el pensamiento de todos los tiempos, se conoce muy poco de la vida de Euclides y, en muchos casos, su biografía, más que de hechos, está salpicada de anécdotas. Se sabe que Euclides era más joven que el filósofo Platón (427-347 a.C.) y mayor que el físico y astrónomo Arquímedes (287-212 a.C.). También se conoce que enseñó e investigó en el Museo de Alejandría, a donde, se conjetura, lo habría traído Ptolomeo, el general macedonio preferido de Alejandro Magno, que heredó la parte africana del imperio alejandrino.

Estatua de Euclides en el Museo de Historia Natural de la Universidad de Oxford.

que se sabía que únicamente se trataba de una regla del juego que había que aceptar, daba la impresión de que podía tener alguna razón de ser y de que podía demostrarse a partir de los anteriores. Quizás esa sensación que producía de ser un postulado diferente contribuyó a que, durante varios siglos, muchos geómetras quisieran probarlo a partir de los anteriores. Ellos intentaban, en cierto

modo, eludirlo. Como si las reglas del juego de la geometría pudiesen ser aún más económicas de lo que había previsto Euclides.

El filósofo y matemático griego Proclo (412-485) escribía en sus *Comentarios*, acerca de los orígenes de la geometría y sobre los *Elementos* de Euclides, esta afirmación: «El quinto postulado debe ser borrado por completo de los postulados porque se trata de un teorema lleno de dificultades».

«Aquel que desdeña la geometría de Euclides es como el hombre que, al regresar de tierras lejanas, menosprecia su casa.»

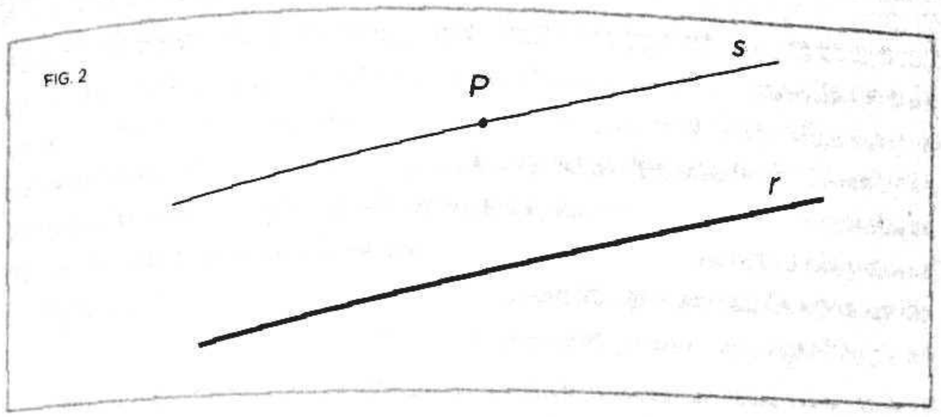
— H. G. Forder (1889-1981), matemático británico.

La versión del quinto postulado que se utiliza actualmente y que suele denominarse «axioma de las paralelas» (figura 2), se debe precisamente a Proclo, aunque posteriormente fue redescubierto por el matemático escocés John Playfair (1748-1819).

Los intentos de demostrar el quinto postulado o el axioma de las paralelas a partir de los postulados anteriores no dieron su fruto. Sin embargo, no se puede decir que se hubiera fracasado. Como todos los intentos de resolver grandes problemas de la matemática, el hecho de no conseguir exactamente el objetivo final nunca convierte en inútil el esfuerzo porque, por el camino, se acaban descubriendo hechos, implicaciones e incluso nuevas teorías que aportan enfoques diferentes e inesperados a veces. Y esto es lo que ocurrió con el intento de «mejorar» a Euclides, que desembocó, al cabo de los siglos, en el descubrimiento de las geometrías no euclídeas.

LAS PRIMERAS IDEAS SOBRE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS

El primer intento serio de cuestionar el quinto postulado de Euclides se debe al matemático italiano Girolamo Saccheri (1667-1733). En el año de su muerte se publicó *Euclides ab omni naevo vindicatus* (*Euclides liberado de todo fallo*), donde el autor se atrevía



Axioma de las paralelas: Por un punto exterior a una recta dada puede trazarse una y solo una recta paralela a la primera.

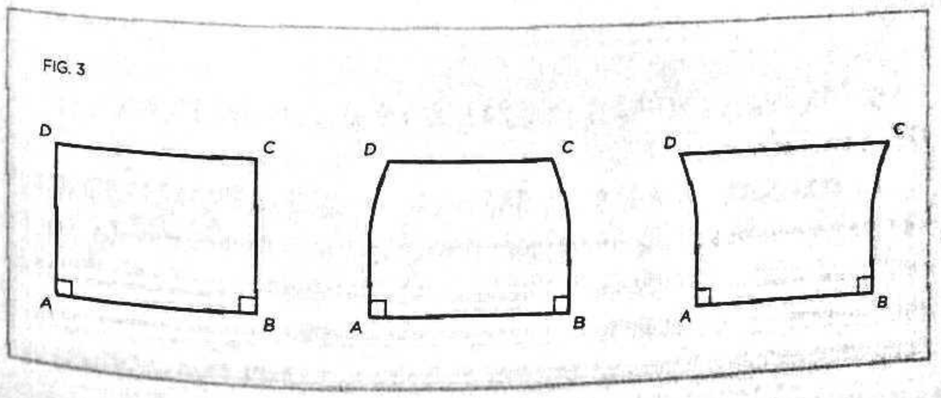
a cuestionar a Euclides de una manera muy audaz para su época preguntándose: «¿Qué pasa si suponemos que no es así?». Quizá fue la primera vez en la que los geómetras se atrevieron a poner en duda a los clásicos. Realmente fue Saccheri quien abrió la puerta de las geometrías no euclídeas, aunque posiblemente él no fuera consciente de lo que su obra podía suponer.

Saccheri empezó considerando que si en un cuadrilátero *ABCD* los ángulos *A* y *B* eran rectos y los lados *AD* y *BC* iguales, entonces los ángulos *D* y *C* deberían ser iguales también. Ahora bien, *D* y *C* eran ángulos iguales, pero ¿iguales a qué?

A continuación planteó tres hipótesis (figura 3):

— Hipótesis del ángulo recto: los ángulos son iguales a un ángulo recto.

— Hipótesis del ángulo agudo: los ángulos son iguales a un ángulo agudo.



Hipótesis de Saccheri.

— Hipótesis del ángulo obtuso: los ángulos son iguales a un ángulo obtuso.

Saccheri probó primero que la hipótesis del ángulo recto era equivalente al axioma de las paralelas. Después, su intención era, utilizando el método de reducción al absurdo, llegar a una contradicción en el caso de las hipótesis del ángulo obtuso y del ángulo

LEGENDRE Y UNA DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA CON PAPIROFLEXIA

El matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833) publicó en 1794 uno de los libros de matemáticas con mayor número de tiradas de su época: veinte ediciones en vida del autor. Su título, *Elementos de geometría*, describe a la perfección su contenido. Pretendía explicar de una manera clara y sencilla la geometría contenida en los *Elementos* de Euclides. Y para ello también intentó demostrar el axioma de las paralelas como consecuencia de los postulados anteriores, algo que no consiguió. Tampoco pudo imaginar lo que se conseguiría más adelante simplemente negando ese postulado y admitiendo otros alternativos. Sin embargo, lo que sí probó Legendre es la equivalencia entre el axioma de las paralelas y una proposición que aparece en todos los textos de geometría elemental: «La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos, es decir, 180 grados». Aunque no es exactamente la de Legendre, existe una demostración sencilla y visual utilizando papiroflexia. Realmente no requiere de muchas explicaciones, basta con recortar un triángulo y efectuar varios dobleces. Primero se recorta un triángulo *ABC* como el de la figura a y se dobla el triángulo por la línea que une los puntos medios de los lados *AC* y *BC*. En segundo lugar, se dobla el triángulo por las dos líneas de puntos de la figura b hasta hacer coincidir los vértices *A* y *B* con *C*. Se obtiene un rectángulo (figura c) donde los tres ángulos forman un ángulo llano (dos rectos) y queda demostrado que $A+B+C=180^{\circ}$.

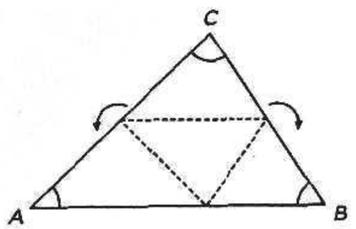


figura a

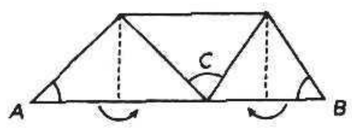


figura b

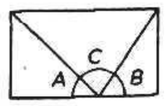


figura c

agudo. Lo consiguió con la hipótesis del ángulo obtuso, pero no pudo con la del ángulo agudo. Después de obtener muchos teoremas de la geometría no euclídea, no pudo conseguir la contradicción con la hipótesis del ángulo agudo, aunque escribió: «La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, ya que es repugnante a la naturaleza de la línea recta».

Realmente, estaba ante el hecho de que no había contradicción en la suposición de que los ángulos podían ser agudos, pero no quiso creerlo.

Treinta años después de la publicación del trabajo de Saccheri, el matemático alemán Johann Heinrich Lambert (1728-1777) escribió un trabajo titulado *Die Theorie der Parallellinien* (*La teoría de las paralelas*), que no se publicó hasta once años después de su muerte. Las investigaciones de Lambert eran muy parecidas a las de Saccheri. Lambert también eligió un cuadrilátero, pero consideró que tenía tres ángulos rectos. Y volvió a plantearse las mismas hipótesis que Saccheri sobre el cuarto ángulo: el ángulo podría ser agudo, recto u obtuso. Al igual que Saccheri, Lambert dedujo muchos resultados de la geometría no euclídea a partir de la hipótesis del ángulo agudo. Sin embargo, a diferencia de su predecesor en el estudio del axioma de las paralelas, no afirmó haber encontrado ninguna contradicción.

Lambert demostró que, bajo las tres hipótesis, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor, igual o mayor que dos ángulos rectos, respectivamente. Descartó la hipótesis del ángulo obtuso, como hizo Saccheri, pero sus conclusiones sobre la hipótesis del ángulo agudo no le resultaron satisfactorias. Quizá fue esta la razón por la que su trabajo acabó publicándose después de su fallecimiento.

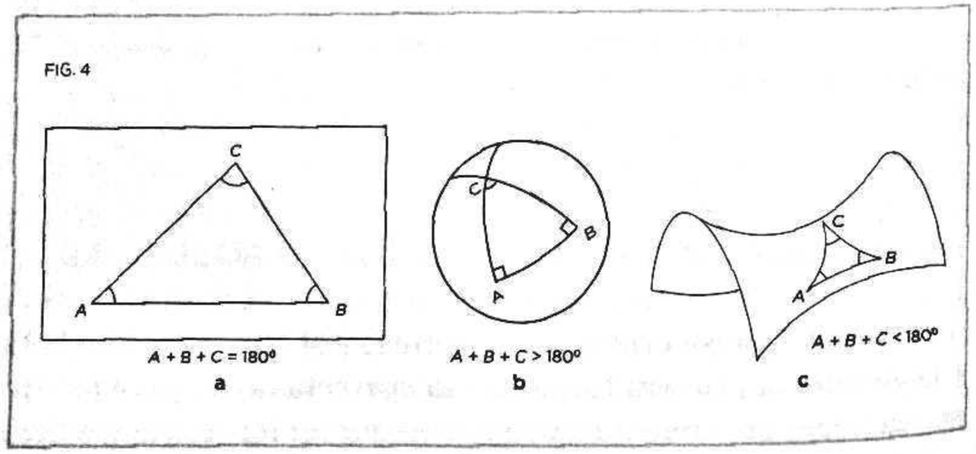
LA ECLOSIÓN DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS

A partir de las primeras ideas sugeridas por Saccheri, Lambert y Legendre, la primera formulación correcta de las geometrías no euclídeas se debió a cuatro matemáticos: los alemanes Carl

Friedrich Gauss (1777-1855) y Bernhard Riemann (1826-1866), el húngaro János Bolyai (1802-1860) y el ruso Nikolái Lobachevski (1792-1856). Fundamentalmente, lo que hicieron estos matemáticos fue sustituir el axioma de las paralelas por alguna de sus negaciones, o bien por los axiomas «por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna recta paralela» o «por un punto exterior a una recta r se puede trazar más de una recta que no interseca a r». Según Legendre, esto equivaldría a «los ángulos interiores de un triángulo suman más de dos rectos» o «los ángulos interiores de un triángulo suman menos de dos rectos». Existen, pues, tres geometrías dependiendo de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo sean igual, mayor o menor de 180°.

Una manera de visualizar las tres geometrías anteriores, que Felix Klein denominó con los nombres de geometría parabólica, elíptica e hiperbólica, es imaginar que los triángulos se dibujan en diferentes superficies. Si la superficie es un plano se obtiene la geometría euclídea o parabólica (figura 4a); si la superficie es la de una esfera, como la superficie terrestre, se consigue la geometría elíptica (figura 4b); finalmente, si la superficie es como la de una silla de montar se obtiene la geometría hiperbólica (figura 4c). Evidentemente, en las dos geometrías no euclídeas la idea de línea recta es diferente de la geometría plana. Ahora la línea recta entre dos puntos sería el camino más corto, por la superficie, para llegar de un punto a otro.

Geometrías a) euclídea, b) elíptica y c) hiperbólica.



La llamada «geometría hiperbólica» fue introducida por el matemático húngaro János Bolyai. Sus descubrimientos fueron publicados como un apéndice a un libro de matemáticas que publicó su padre, el también matemático Farkas Bolyai, en 1831. En una carta que envió a su padre comunicando su descubrimiento, János escribía: «He creado un mundo nuevo y extraño, de la nada». El padre de János también había trabajado en el problema de las paralelas aunque no había llegado a ninguna conclusión y, de hecho, intentó disuadir a su hijo de que continuara «perdiendo el tiempo» con ese problema, algo que János no hizo.

> «Estoy convencido de que prescindir del postulado de las paralelas no lleva a ninguna contradicción, aunque se obtengan propiedades que resulten paradójicas.»
>
> — CARL FRIEDRICH GAUSS, ANOTACIÓN EN UNO DE SUS CUADERNOS.

Farkas Bolyai era amigo de Gauss y le había escrito, cuando János tenía trece años, para solicitarle que lo acogiera en su casa como aprendiz de matemáticas. Sin embargo, en aquel momento Gauss no contestó. Años después, cuando se publicó el libro con el apéndice, Farkas Bolyai envió una copia a Gauss informándole de los descubrimientos de su hijo. Esta vez Gauss sí contestó, expresando su admiración por el trabajo de János, pero señalando también que las mismas conclusiones a las que había llegado el joven János eran las que llevaba él mismo estudiando desde hacía más de treinta años. Y, efectivamente, hoy sabemos que posiblemente fue Gauss el primer matemático que tuvo la idea de una geometría distinta a la de Euclides.

Sin embargo, Gauss nunca publicó nada relacionado con estos estudios porque consideró que no iba a ser comprendido por sus contemporáneos. Las geometrías no euclídeas no fueron aceptadas inmediatamente. Suponían una ruptura con los clásicos y con Euclides, que llevaba reinando en la geometría durante más de veinte siglos.

La respuesta de Gauss no gustó a János, hasta el punto de enemistarlo con su padre y, a raíz de este hecho, fue abandonando la investigación matemática.

Sin tener conocimiento de los trabajos e investigaciones de Bolyai y de Gauss, el matemático ruso Nikolái Lobachevski había publicado en 1829 un tratado completo sobre geometría no euclídea, *Sobre los principios de la geometría*. No obstante, la obra se publicó en una revista científica de Kazán, en ruso, por lo que no fue muy conocida en un principio, hasta que, en 1837, fue publicada una versión francesa en el *Crelle's Journal*.

Al igual que en el caso de Bolyai, Gauss conocía y aprobaba el trabajo de Lobachevski pero no lo dijo públicamente. Es probable que el hecho de que Gauss no publicase nunca nada sobre este tema fuese una de las razones por las que el conocimiento y la aceptación de la geometría de Bolyai y de Lobachevski no tuviesen lugar hasta que el italiano Eugenio Beltrami (1835-1900), en dos memorias publicadas en italiano con el título *Ensayos sobre la interpretación de la geometría no euclídea*, demostró la consistencia de las interpretaciones de ambos.

Bolyai y Lobachevski exploraron la hipótesis del ángulo agudo, según la denominación de Saccheri. Y Bernhard Riemann, que fue alumno de Gauss, exploró la hipótesis del ángulo obtuso, que lo llevó a crear la que Felix Klein denominó después como «geometría elíptica».

Se cuenta que, en cierta ocasión, siendo Gauss profesor de Riemann en la Universidad de Gotinga, los alumnos tenían que proponer tres temas de su elección y la facultad escogería uno de esos tres temas para que el alumno preparara una disertación de tres horas. Riemann acabó disertando sobre la obra de Lobachevski *Sobre los principios de la geometría*. Al empezar su discurso, afirmó:

> «Euclides dice que por un punto exterior a una recta no se puede trazar más que una sola paralela; Lobachevski dice que se pueden trazar todas las que se quieran, y yo digo que no se puede trazar ninguna.
> [...]

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA.
Aunque nunca publicó estudios relacionados con las geometrías no euclídeas, el alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) contribuyó de forma notable a su formulación.

FOTO SUPERIOR DERECHA.
János Bolyai (1802-1860), de origen húngaro, fue el introductor de la geometría hiperbólica.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA.
El matemático ruso Nikolái Lobachevski (1792-1856) publicó, en 1829, *Sobre los principios de la geometría*, un tratado completo sobre geometría no euclídea.

FOTO INFERIOR DERECHA.
El alemán Bernhard Riemann (1826-1866) completa el cuarteto de matemáticos que hicieron posible la primera formulación correcta de las geometrías no euclídeas.

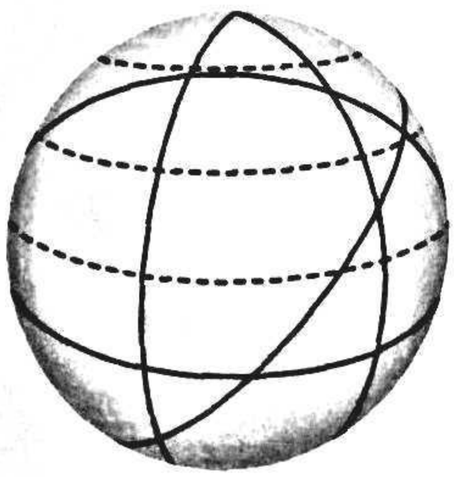
> Así como no existe la línea indefinida recta, porque acaba por convertirse en curva, tampoco existe el plano indefinido recto, porque prolongado tiene que seguir la curvatura del universo. Pero como la seguirá en todas las direcciones, el único plano curvo es el esférico. No hay más geometría que la que se traza sobre una esfera».

Esta disertación ya contenía las ideas esenciales de la geometría de Riemann, de la geometría elíptica. Las ideas definitivas de Riemann quedarían dichas y escritas para la posteridad en la conferencia que ofreció en 1854, con motivo de su habilitación como profesor para impartir clases en la Universidad de Gotinga. El título *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Sobre las hipótesis en las que se apoyan los fundamentos de la geometría*) es, para muchos matemáticos, uno de los tres trabajos más influyentes para la geometría de todos los tiempos. Los otros dos son, los *Elementos* de Euclides y el *Programa de Erlangen* de Felix Klein.

Una de las diferencias entre la geometría elíptica y la geometría euclidiana, si se piensa en el modelo de la geometría sobre una esfera, es que en la superficie de la esfera la distancia más corta entre dos puntos no es una línea recta. Es una línea que se denomina «gran círculo», que no es más que una circunferencia lo más grande posible que se puede dibujar sobre la superficie de la esfera (figura 5).

Grandes círculos sobre la superficie de una esfera.

FIG. 5



Por ejemplo, en la superficie de la Tierra, los meridianos, que son círculos que pasan por los polos, son grandes círculos. También lo es el ecuador, pero no así los paralelos. Esto quiere decir que si quisiéramos viajar entre dos puntos de la superficie terrestre que se encuentren sobre el mismo paralelo (que no sea el ecuador), el camino más corto no sería el propio paralelo, sino el gran círculo que pase por esos dos puntos. Estas líneas, las «geodésicas» de la esfera, es decir, las curvas de mínima distancia, son las «líneas rectas» de la superficie terrestre.

La diferencia fundamental entre la geometría de Riemann y la geometría de todos sus predecesores, incluyendo a su propio maestro, Gauss, es el punto de vista, es decir, la perspectiva desde la que se plantea la geometría.

Gauss, al pensar en una superficie curva en dos dimensiones, tal como la superficie de una esfera o la de una silla de montar, la veía desde una perspectiva tridimensional, como un observador que mirase a la Tierra desde la Luna. Riemann, sin embargo, se situaba en la superficie misma.

LA GEOMETRÍA RIEMANNIANA

La geometría de Riemann era no euclídea en un sentido mucho más general que en el caso de la geometría de Bolyai y de Lobachevski, donde el punto esencial estaba en cuántas paralelas se podían trazar por punto a una recta dada. Riemann consideraba que la geometría ni siquiera debía tratar de puntos y rectas, sino que, si se pensaba en el espacio de tres dimensiones, los puntos eran ternas de números (coordenadas x, y, z) que se podían combinar según ciertas leyes.

Una de estas leyes era la que permitía determinar la distancia entre dos puntos que se encontraban muy cerca. En el caso de la geometría euclídea si las diferencias entre las coordenadas de los dos puntos eran dx, dy y dz, la distancia entre los dos puntos, ds, verificaba la siguiente relación:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

A esta expresión, que no es más que el teorema de Pitágoras en su versión tridimensional, Riemann la llamaba «métrica» del espacio euclídeo.

Ahora bien se podrían definir otras métricas generalizando la expresión anterior a otra que dependiese de las propiedades del

espacio. Así, se podrían considerar métricas de la forma más general

$$ds^2 = g_{11}\,dx^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dxdz + g_{21}dydx + g_{22}dy^2 + g_{23}dydz + g_{31}dzdx + g_{32}dzdy + g_{33}dz^2.$$

Donde los números

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix},$$

escritos en forma de matriz, podían ser números constantes o, incluso, variables como funciones dependientes de x, y o z. Esto es lo que se conoce como un «espacio de Riemann». Por ejemplo, la geometría euclidiana tridimensional sería aquella en la que la métrica viene determinada por la matriz «identidad», es decir, la matriz

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta idea de Riemann de estudiar las métricas generales de los espacios geométricos es la que proporcionó las herramientas matemáticas necesarias para desarrollar la teoría de la relatividad. El astrofísico israelí Mario Livio (n. 1945) afirma, refiriéndose a las ideas de Riemann, que «este tipo de anticipación por parte de los matemáticos de las necesidades de los físicos se ha repetido muchas veces a lo largo de la historia de la ciencia». Y, sin duda, seguirá ocurriendo.

LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

Hacia 1870 se habían desarrollado y consolidado no solamente las geometrías no euclídeas de Gauss, Bolyai, Lobachevski y Riemann,

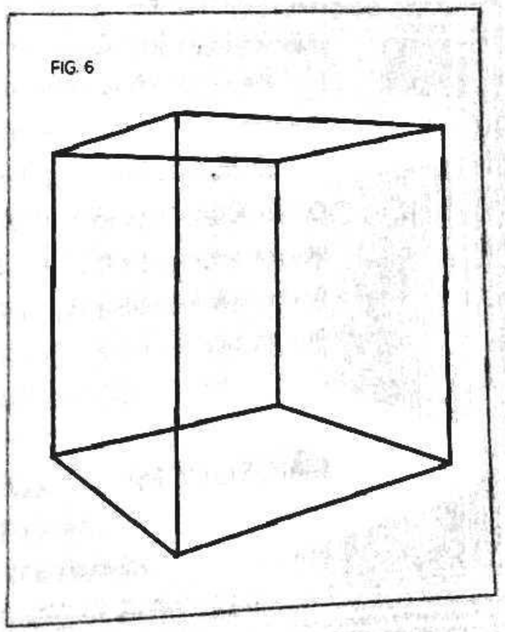
sino también una geometría que había surgido del mundo del arte, la «geometría proyectiva». A artistas como el florentino Leonardo da Vinci (1452-1519) y el alemán Alberto Durero (1471-1528) les preocupaba cómo encontrar técnicas que permitieran representar en un plano de dos dimensiones, el lienzo, aquello que veían en el espacio de tres dimensiones, el mundo que les rodeaba. De hecho, Durero, además de una gran cantidad de obra pictórica, también dejó escritos varios tratados de geometría. Ahora bien, fue el matemático e ingeniero francés Gérard Desargues (1591-1661) quien puso los fundamentos matemáticos de la geometría proyectiva.

La geometría proyectiva estudia aquellas propiedades geométricas que no cambian cuando se usa una proyección. Por tanto, propiedades tales como las distancias o ángulos no son objeto del estudio de la geometría proyectiva, pues se modifican con la proyección.

El teorema de Pitágoras, que habla de la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, no es un teorema de la geometría proyectiva. Cuando se observa la imagen de un cubo en perspectiva (figura 6), es decir, la proyección del cubo en una hoja de papel, aunque se conoce que las caras del cubo son cuadradas y, por tanto, los ángulos en los vértices son rectos, la proyección sobre el papel no mantiene esos ángulos rectos. Tampoco aparecen las aristas todas iguales, tal y como son en realidad en un cubo. Lo que sí se mantienen son las concurrencias de los vértices: si tres aristas determinadas se cortaban antes en un vértice, ahora esas mismas tres aristas siguen cortándose en el mismo vértice. Estos son los conceptos de la geometría proyectiva: puntos, rectas e incidencia.

Cubo en perspectiva.

FIG. 6



Otra diferencia fundamental entre la geometría euclídea y la geometría proyectiva se da en la idea de paralelismo. En la figura del cubo se sabe que las aristas opuestas del cuadrado

de la base son paralelas en el espacio. Sin embargo, en la representación no lo parecen y no lo son, sino que acaban cortándose en un punto que se denomina «punto del infinito». Todas las paralelas del cubo proyectado acaban cortándose en puntos del infinito. Todos estos puntos juntos forman la llamada «recta del infinito».

LA GEOMETRÍA NO EUCLÍDEA SEGÚN KLEIN

Todo lo expuesto hasta ahora era, a grandes rasgos, el panorama de la geometría a comienzos de la década de 1870. Felix Klein, en 1871, acababa de regresar de París apresuradamente, debido al comienzo de la guerra franco-prusiana. Se alistó en el ejército y estuvo destinado como auxiliar de enfermería, pero inmediatamente contrajo tifus, así que fue licenciado para curarse la enfermedad.

La primera intención de Klein fue retomar sus viajes, pero los tiempos de guerra no eran propicios para emprender ningún periplo, así que en el mismo 1871 volvió a Gotinga. En la universidad, Klein se habilitó para ejercer como *Privatdozent*, que era el primer paso de la carrera investigadora en la Alemania de la época, y continuó siéndolo algún tiempo más. Este puesto de profesor permitía enseñar pero sin percibir un salario, pues únicamente se cobraba por la matrícula de los alumnos que asistían a los cursos impartidos.

En Gotinga se encontraba su maestro Alfred Clebsch, que dirigía la revista *Mathematische Annalen*, en la que Klein escribió uno de sus trabajos más importantes. Se trata de la primera parte del artículo titulado *Sobre la así llamada geometría no euclídea*, que se publicó en 1871. La segunda parte apareció en la misma revista dos años después. En este primer trabajo Klein demostró que era posible considerar la geometría euclídea y no euclídea como casos particulares de la geometría proyectiva. Realmente lo que hizo Klein fue construir modelos de la geometría no euclídea utilizando ideas de la geometría proyectiva.

El modelo de Klein para la geometría hiperbólica de Bolyai y Lobachevski consiste en un disco en cuyo interior están contenidos los puntos de la geometría (figura 7). Las rectas son las cuerdas del círculo. Así, por ejemplo, si se considera un punto P, exterior a la recta r, por él se pueden dibujar rectas que no cortan a r. De esta forma, se verifica el axioma de la geometría hiperbólica que afirma que por un punto exterior a una recta se puede dibujar más de una recta paralela a la recta dada.

También introdujo Klein un concepto de «distancia» que hace que esa distancia aumente indefinidamente si uno de los puntos se aproxima al borde de la circunferencia. De hecho los puntos de la circunferencia no forman parte de la geometría, son los «puntos ideales» o, a partir del concepto de distancia, los «puntos del infinito» de la recta, de manera similar a la idea de los puntos del infinito de la geometría proyectiva.

Para la geometría elíptica de Riemann, Klein utilizó un modelo precisamente basado en la figura de la elipse. También en este caso utilizó un disco (figura 8). Ahora los puntos de la geometría son los del interior y también los de la circunferencia.

Puntos de la circunferencia diametralmente opuestos se identifican, es decir, se consideran un único punto. Las «rectas» del modelo son semielipses cuyo eje mayor es precisamente un diámetro del disco. De esta forma, se dibujen como se dibujen, todas las parejas de rectas se cortan en algún punto, sea en el interior o sea coincidiendo en los puntos de la circunferencia. Así, se verifica el axioma de la geometría elíptica según el cual por un punto exterior a una recta todas las rectas que se dibujen cortarán en algún punto a la recta inicial. Hay que tener en cuenta que los arcos de las elipses

FIG. 7

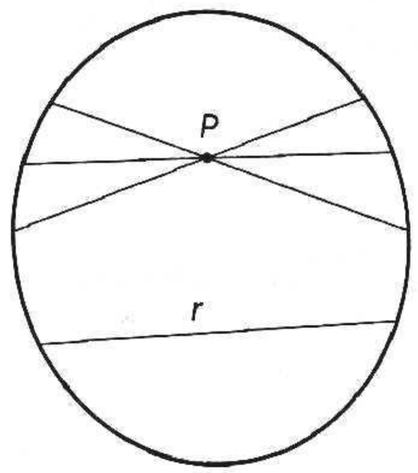


FIG. 8

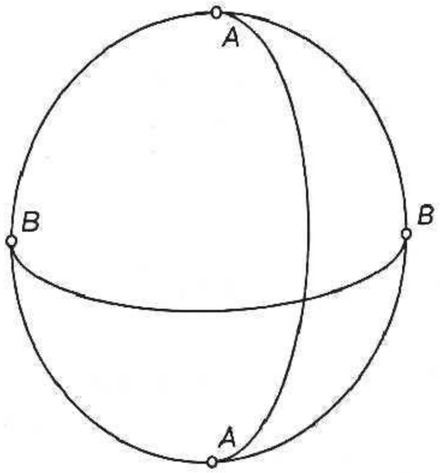


FIGURA 7
Disco de Klein de la geometría hiperbólica.

FIGURA 8.
Disco de Klein de la geometría elíptica.

siempre conectan dos puntos diametralmente opuestos, de ahí que no haya manera de dibujar una recta sin que corte a otra. En otras palabras, el paralelismo entre las «rectas» de esta geometría no existe.

La cuestión de encontrar modelos euclídeos de la geometría no euclídea, como hizo Klein, era más importante de lo que parecía a simple vista. Los seguidores del filósofo alemán Immanuel Kant (1724-1804) solo podían imaginar la geometría euclídea, ya que esta era la única inherente a la estructura de su mente. Los filósofos de la época pensaban de forma euclídea. De manera que una geometría no euclídea era inconcebible, era una entelequia. Es posible que esta forma de pensar de los filósofos, a la que no era ajeno Klein, le llevase a elegir el título de su trabajo, *Sobre la así llamada geometría no euclídea*. La obra de Klein estaba muy documentada históricamente. Mencionaba no solo a Lobachevski y a Beltrami, sino también a Bolyai, a partir de sus trabajos traducidos al italiano. En la segunda parte de la publicación, que apareció en 1873, Klein extendió de dos a n dimensiones los argumentos que había utilizado en la primera parte.

EL PROGRAMA DE ERLANGEN

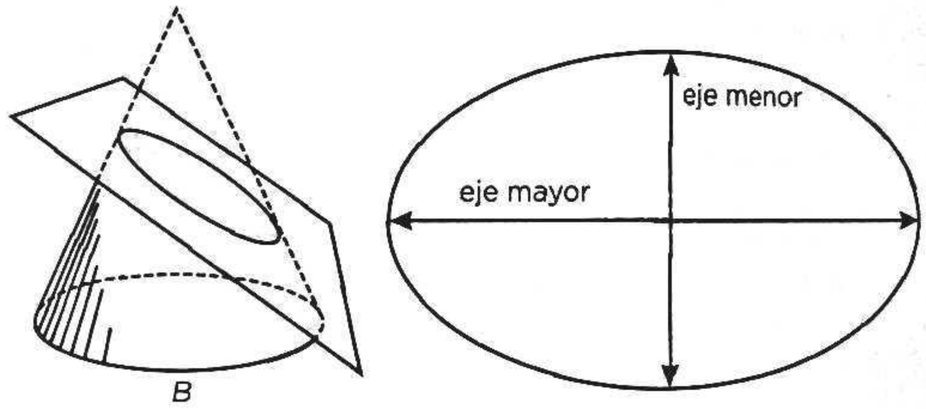
En parte gracias a este trabajo y también al apoyo de Clebsch, en octubre de 1872 Klein consiguió una cátedra en la Universidad de Erlangen, en Baviera, en el sur de Alemania. Klein tenía veintitrés años entonces. La Universidad de Erlangen no se encontraba entre las universidades con mejores medios de Alemania. En palabras del propio Klein, su biblioteca era «antediluviana» y había pocos estudiantes interesados en las matemáticas. De hecho, incluso a pesar de que Klein siempre fue reconocido como un excelente profesor, al principio solo tuvo dos estudiantes en su clase en Erlangen, y se cuenta que después de la primera lección solo le quedó uno.

Según la costumbre, Klein tenía que dar una conferencia inaugural con motivo de su toma de posesión del puesto de catedrático en Erlangen. Presentó un texto, que circuló en un reducido círculo inicialmente, con el título, en un alemán clásico, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (*Reflexiones comparativas sobre nuevas investigaciones en la geometría*), el famoso *Programa de Erlangen*, en el que propondría un revolucionario punto de vista de la geometría y que se convertiría en uno de los tres textos de geometría más influyentes de la historia.

Lo cierto es que en la conferencia que impartió Klein explicó la importancia de cultivar la matemática aplicada junto a la mate-

ELIPSES

Una elipse es la curva que se obtiene al cortar la superficie de un cono por un plano que sea oblicuo al eje de revolución del cono. Si se considera como una curva plana, también es posible definirla como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos de la elipse, se mantiene constante. El astrónomo y matemático Johannes Kepler (1571-1630) descubrió que las órbitas de los planetas del sistema solar tienen forma de elipse, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. A diferencia de las circunferencias, que tienen una única medida para el diámetro, en la elipse el «ancho», es decir, la distancia entre puntos opuestos de un diámetro (entendiendo por diámetro cualquier segmento que una puntos de elipse y que pase por el centro), no siempre es el mismo. El mayor de los diámetros de la elipse se llama eje mayor y el más pequeño se denomina eje menor. Estos ejes siempre son perpendiculares.



mática pura con el objeto de preservar las conexiones entre diferentes campos de conocimiento, tales como la física y la tecnología. También habló del desarrollo de la intuición visual como un componente tan importante para el matemático como lo es la habilidad para manejar la lógica, y sobre todo, destacó la importancia para las matemáticas de la imaginación y la espontaneidad. También comentó sus planes para organizar charlas y seminarios relacionados con la geometría en su nuevo puesto.

Sin embargo, lo que ha pasado a la historia es realmente el manuscrito que presentó y que desde las primeras ediciones se conoce como *Programa de Erlangen*. Hasta el trabajo de Klein, los matemáticos entendían la geometría en términos de objetos tales como puntos, rectas, triángulos, círculos, y sus características y relaciones entre ellos como distancias, ángulos, etcétera. El punto de vista de Klein era diferente. Sugería que la propia geometría no estaba caracterizada por los objetos sino por el «grupo de transformaciones» que hacía que permanecieran invariantes ciertas propiedades. La geometría no era más que el estudio de los invariantes de un grupo de transformaciones. Para estudiar un tipo de geometría es necesario definir un espacio ambiente, los objetos que van a estudiarse y un grupo que define las transformaciones del espacio ambiente que hacen que permanezcan invariables ciertas relaciones entre los objetos.

Por ejemplo, se considera el conjunto M de todos los puntos del plano ordinario y G el conjunto de todas las transformaciones geométricas de M que consisten en realizar traslaciones, rotaciones, reflexiones o la composición de estas transformaciones, es decir, la aplicación de dos o más de estas transformaciones una a continuación de otra. El conjunto G tiene estructura de «grupo» tal y como se ha descrito en el primer capítulo. La geometría resultante es la geometría euclídea, G es el «grupo de isometrías», es decir, el grupo de transformaciones que dejan invariantes propiedades métricas objeto de estudio de la geometría euclídea como la longitud, el área, la perpendicularidad, el paralelismo, etcétera.

En geometría proyectiva, por ejemplo, es evidente que las distancias no son invariables. Por tanto, la geometría proyectiva va a estar caracterizada por un grupo de transformaciones diferentes del grupo de isometrías, y se van a conservar propiedades tales como «hexagonal» o «elíptico»; en efecto, un hexágono o una elipse van a seguir siendo un hexágono y una elipse después de una proyección, aunque quizá no mantengan los mismos ángulos ni la misma área.

Felix Klein conseguía así unificar la geometría con un mismo código, el «grupo de simetría». Klein practicaba una forma de entender las matemáticas, que persiste hoy en día, que huye de la diversidad y la fragmentación y busca puntos de vista unificadores, aunque ello suponga una abstracción mayor.

El *Programa de Erlangen* es la culminación y la síntesis de muchos estudios matemáticos previos y no es obra únicamente de su autor. Como el propio Klein recordó más tarde, muchas de las ideas que aparecen en el programa también se deben a su amigo Sophus Lie, que lo acompañó durante los primeros momentos en Erlangen. Según contaba el propio Klein en sus obras completas:

> Compuse el *Programa de Erlangen* en octubre de 1872. Dos circunstancias son relevantes. La primera, que Lie me visitó durante dos meses, a partir del 1 de septiembre. Tuve con Lie, que me acompañó a Erlangen el 1 de octubre, discusiones diarias sobre su nueva teoría de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. La segunda, que Lie participó enérgicamente en mi idea de clasificar los diferentes enfoques de la geometría sobre la base de la teoría de grupos.

En un principio, el *Programa de Erlangen* no fue bien acogido. Es posible que alguna de las razones sea el hecho de que algunos matemáticos de Berlín consideraban a Klein «un charlatán sin mérito real» y, sin duda, también porque no se había difundido adecuadamente el manuscrito. No obstante, a partir de 1880 aparecieron versiones en italiano, francés e inglés.

El propio Klein comentaba en su prólogo a la edición inglesa que aunque al principio no había recibido mucha atención, para él en aquel momento era suficiente; pero el hecho de que el desarrollo general de la matemática hubiera tomado la dirección que correspondía precisamente a las ideas expuestas en él, particular-

mente gracias a algunas publicaciones sobre grupos de transformaciones de Lie, hacía conveniente darle una circulación más amplia.

Felix Klein no permaneció mucho tiempo en Erlangen. Aunque llegó a tener más alumnos de los dos que asistieron a su primera clase, nunca constituyeron un número importante ni estuvieron muy interesados en las matemáticas. En cualquier caso, Klein tuvo tiempo que dedicar a la investigación, de una manera exitosa, todo sea dicho. En 1872, el mismo año en que se publicó el *Programa de Erlangen*, Clebsch falleció de difteria, tenía solo treinta y nueve años. Klein se hizo cargo de la edición de la revista *Mathematische Annalen*, una responsabilidad que mantuvo casi hasta el final de su vida. Consiguió convertirla en la más importante publicación matemática del mundo de la época, algo que contribuyó decisivamente a consolidar su influencia científica a escala internacional.

Klein permaneció en Erlangen tres años, hasta que en 1875 consiguió una nueva cátedra en Múnich.

CAPÍTULO 3

De Múnich a Leipzig

Felix Klein era un matemático reconocido internacionalmente cuando salió de Erlangen. Sin embargo, su época en Múnich y Leipzig fue la más fecunda. Fue entonces cuando surgió la idea de su famosa «botella de Klein» o la solución de la ecuación de quinto grado a partir de la aplicación de técnicas de la teoría de grupos.

Como es sabido, la Tierra tiene forma esférica, pero no siempre se pensó que fuera así. En algunas épocas de la historia se creyó que la Tierra era plana, una idea que ahora resulta pintoresca. Pero cuando la humanidad no podía viajar como se hace hoy en día y la tecnología de la observación astronómica se realizaba a simple vista, era perfectamente razonable que sabios como Tales de Mileto (623-546 a.C.) sostuvieran que la Tierra era plana.

Se cree que la primera persona en defender la idea de que la superficie de la Tierra era esférica fue el filósofo griego Pitágoras (569-475 a.C.), aunque no hay evidencias que lo confirmen. Sí que hay certeza de que así lo pensaba el filósofo Aristóteles (384-322 a.C.), quien lo justifica en su obra *Sobre el cielo*. El matemático y astrónomo Eratóstenes (276-194 a.C.) incluso fue capaz de medir, mediante un ingenioso procedimiento, la circunferencia de la Tierra con una asombrosa precisión para la época.

La razón por la que los antiguos, o incluso un niño pequeño, puedan pensar que la Tierra es plana es porque si se consideran pequeñas distancias, la superficie esférica parece una superficie plana. Una pequeña porción de una gran superficie esférica es tan parecida a un plano que distinguir las dos no es tarea fácil.

Para comprobar que las personas viven en la superficie de una esfera es necesario medir distancias comparables a la circunferencia de la esfera; sin embargo, si las distancias que se consideran

son pequeñas en comparación con las dimensiones totales de la esfera, puede resultar muy complicado distinguir en qué superficie se está.

En 1882, Felix Klein tuvo una idea modificando e invirtiendo el argumento anterior. De hecho, demostró que cualquier superficie podía representarse mediante una porción de un plano, concretamente mediante un polígono en el que los puntos de sus lados estaban identificados de manera adecuada.

La figura 1 muestra varios puntos de la superficie de un cuadrado en el plano. Realmente no importa que sea un cuadrado o un rectángulo con lados desiguales, dado que no se tienen en cuenta las distancias. Los puntos del lado superior se identifican con los puntos del lado inferior, de tal forma que el punto *A* de arriba es igual al punto *A* de abajo. Lo mismo ocurre con los puntos *B* de los lados izquierdo y derecho. Por ejemplo, si una criatura se moviese por la superficie del cuadrado y desapareciese por el punto *A* de arriba, aparecería instantáneamente en el punto *A* de abajo. Asimismo, si desapareciese por el punto *B* de la derecha, aparecería por el punto *B* de la izquierda.

Representación plana de una superficie.

Esa extraña criatura que se mueve en la superficie del cuadrado no percibe la tercera dimensión, no puede salir de la superficie y no puede «ver» lo que hay fuera de ella. De manera que, si no se tienen en cuenta las distancias, la superficie del cuadrado con los lados identificados puede transformarse en la superficie de un neumático. Dado que el lado de arriba y el de abajo están identificados, pueden pegarse. Si se procede de igual modo con el lado de la izquierda y el de la derecha, se obtiene la superficie que en matemáticas se denomina «toro», palabra que proviene del latín *torus*, que significa protuberancia o elevación curva (figura 2).

FIG. 1

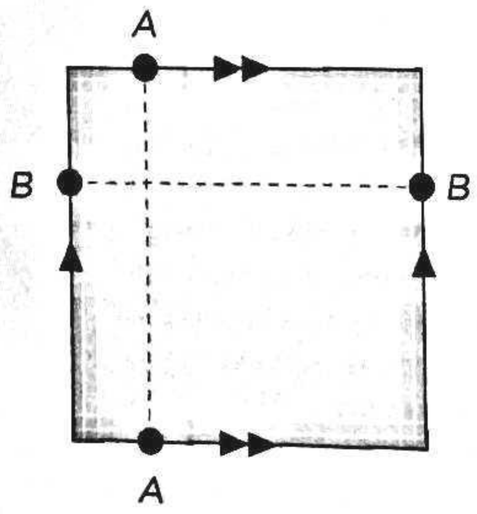
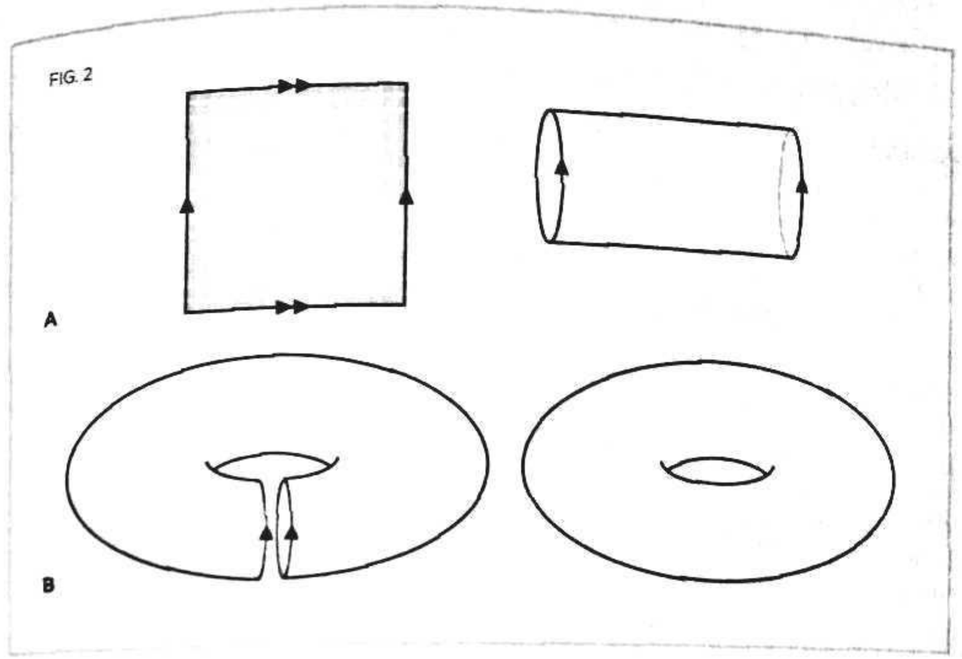


FIG. 2



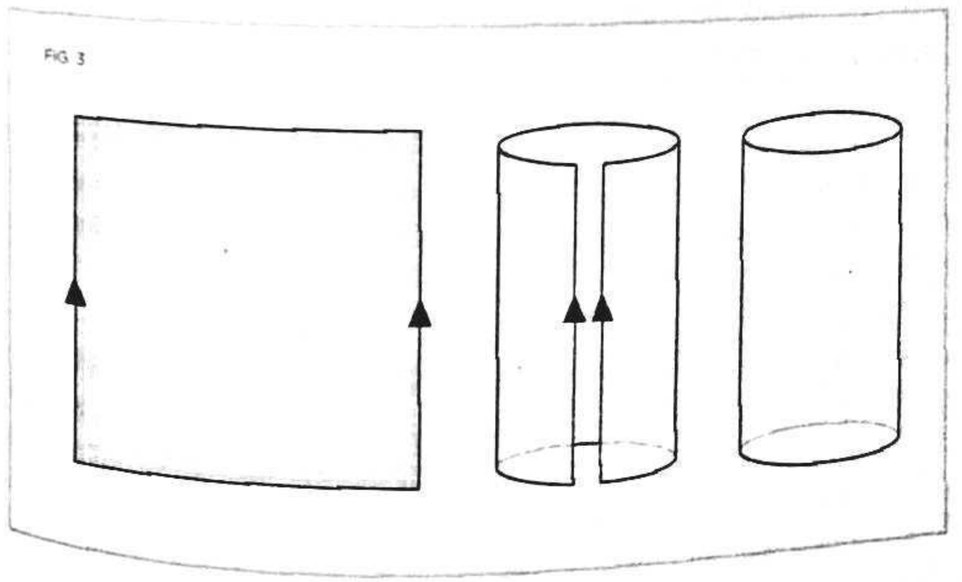
Toro A plano y B curvado.

Si en el cuadrado inicial se identifican únicamente los lados de la izquierda y de la derecha, como se ha descrito antes, dejando libres los lados de arriba y de abajo, la superficie topológica que representa el cuadrado es un cilindro (figura 3). Se puede pensar, por ejemplo, en la etiqueta de una lata de conservas.

No obstante, si en lugar de identificar únicamente los lados de la izquierda y de la derecha se invierte la identificación de los

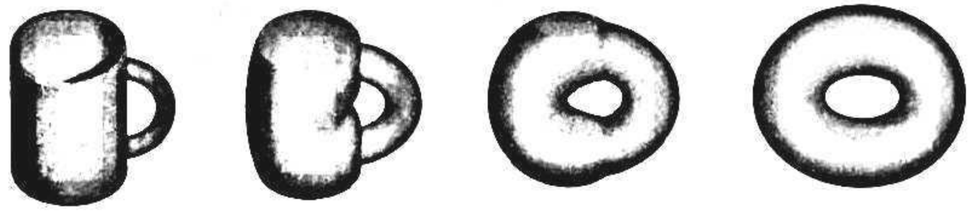
Cilindro.

FIG. 3



LA TOPOLOGÍA, SEGÚN FELIX KLEIN

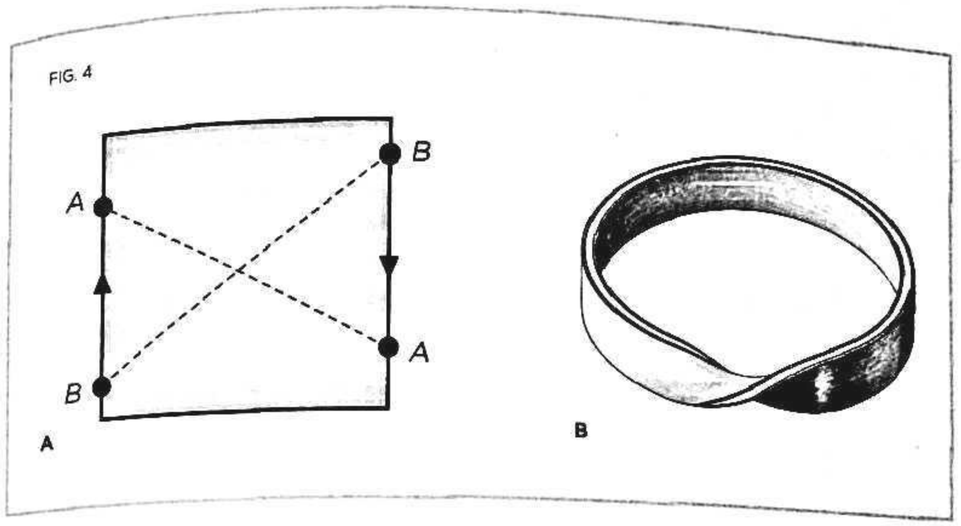
Si se deforma una superficie esférica, aplastándola, estirándola, incluso retorciéndola, siempre y cuando no se le haga ningún agujero, ni se peguen dos puntos por el interior de la superficie, ni se rompa, la superficie que se obtiene es la misma desde el punto de vista de la «topología». Por ejemplo, las superficies de un balón de fútbol y de un balón de rugby son topológicamente equivalentes. Incluso se pueden considerar topológicamente equivalentes la superficie de una taza y la de un toro, porque una de ellas se puede deformar, de manera continua, hasta convertirse en la otra.
A pesar de que la topología se considera hoy en día una rama independiente de la matemática, su definición entraba dentro de la categoría de geometría, según el programa de Erlangen de Felix Klein. En efecto, la topología era el estudio de las propiedades (en este caso, de las superficies) que permanecen invariantes bajo la acción del «grupo de los homeomorfismos», también llamados «transformaciones bicontinuas». Es decir, según la clasificación de Felix Klein, la topología era otra geometría.



Trasformación de una taza hasta convertirse en un toro.

puntos de los lados (figura 4a), se obtiene una superficie diferente. Ahora bien, antes de pegar los lados como se ha hecho con el cilindro, se estira el cuadrado desde los laterales, se da media vuelta a la banda obtenida y se pega (figura 4b). De esta forma se obtiene una superficie que se denomina «banda de Moebius», estudiada por primera vez por los matemáticos alemanes August Ferdinand Moebius (1790-1868) y Johann Benedict Listing (1808-1882).

La banda de Moebius es una superficie que tiene una sola cara. Una hormiga que camine por el interior de la banda puede recorrer



Construcción de la banda de Moebius.

todos los puntos y todas las posiciones sin pasar por el borde ni una sola vez.

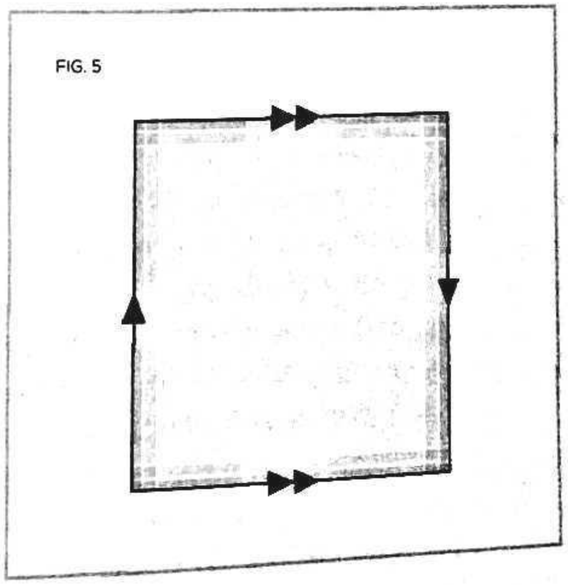
«Cuando la banda de Moebius se esconde en ella misma, surge la botella de Klein... ¿La ves?»

— JUAN JOSÉ ARREOLA (1918-2001), EN SU CUENTO *BOTELLA DE KLEIN*.

LA BOTELLA DE KLEIN

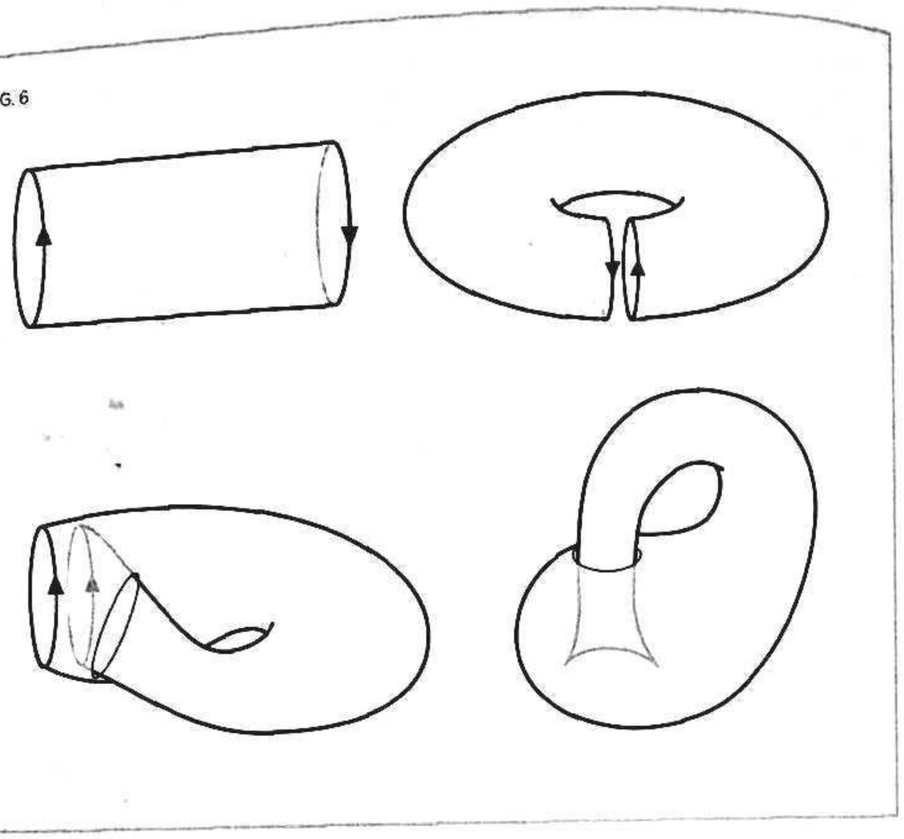
Felix Klein fue más allá y partiendo del cuadrado inicial, además de identificar los lados de la izquierda y la derecha como en el caso de la banda de Moebius, identificó también los lados superior e inferior tal y como se había hecho en el caso del toro (figura 5).

Sin embargo, imaginar la superficie en el espacio es, en este caso, algo más complicado. En primer lugar, al igual que con el toro, se pega el lado de arriba con el de



Construcción de la botella de Klein.

FIG. 6

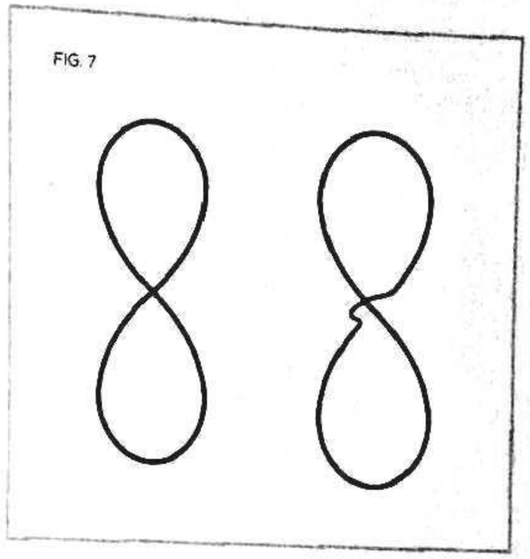


abajo para obtener un cilindro. Aunque ahora, cuando se intenta pegar los otros tres lados queriendo construir un toro, no puede concluirse porque los dos bordes tienen los puntos identificados en sentido contrario. La única solución, en el espacio tridimensional, es pasar uno de los dos lados a través del otro y hacerlos coincidir con la orientación adecuada. La superficie obtenida se conoce como «botella de Klein» y fue ideada por Felix Klein en 1882.

Realmente la botella de Klein se suele considerar como una representación en el espacio tridimensional de una superficie que, para que verifique las propiedades de la botella de Klein plana, debe estar en el espacio de cuatro dimensiones. Verdaderamente la botella de Klein no tiene autointersecciones, como se puede apreciar en la representación tridimensional. Para entender esta última idea, basta con pensar en la curva de la izquierda de la figura 7. Se trata de una curva en el espacio que no se corta a sí misma en ningún punto. Sin embargo, su proyección en el plano parece

un «ocho», una curva en el plano que se corta en un punto central. Ahora bien, si se tira un poco de uno de los dos trazos para que el otro pase por debajo, se puede ver que la curva realmente no tiene ningún punto en el que se corte a sí misma. A la botella de Klein le ocurre exactamente lo mismo, aunque no sea tan sencillo imaginarla en un espacio de cuatro dimensiones.

FIG. 7

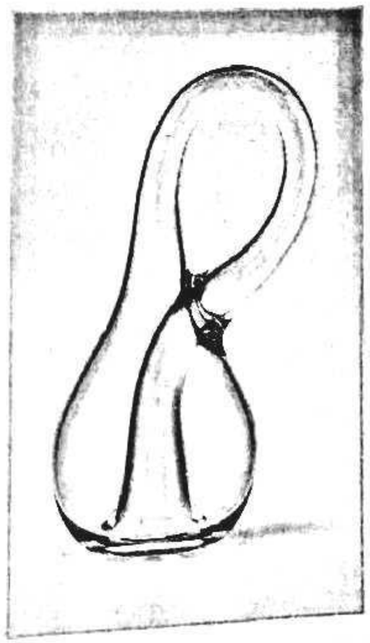


Proyección de una curva en el plano.

La botella de Klein tiene muchas propiedades que hacen de ella un ejemplo de superficie bastante singular. Por ejemplo, al igual que ocurre con la banda de Moebius, solo tiene una cara, la idea de

LA «SUPERFICIE» O LA «BOTELLA» DE KLEIN

La primera referencia a la botella de Klein aparece en un artículo sobre superficies que Felix Klein publicó en 1882. Inicialmente, en las primeras alusiones que se hacían a este objeto matemático, se le denominó «superficie de Klein». Sin embargo, cuando se tradujo del alemán al inglés, el traductor se confundió y lo transcribió por «botella de Klein». La razón es que en alemán superficie de Klein se expresa *Kleinsche Fläche* y botella de Klein se escribe *Kleinsche Flasche* (aunque se pronuncian de manera diferente). Dado que la forma de la superficie de Klein se asemeja bastante a una extraña botella, a nadie le sorprendió tal denominación y, finalmente, quedó como «botella de Klein», hecho que ha contribuido a su popularización.



«dentro» y «fuera» no es tan evidente como podría serlo en la superficie de una esfera. Una criatura que vive sobre la superficie de una esfera, en la parte exterior, solo puede entrar en la parte interior haciendo un agujero en la superficie. Sin embargo, en la botella de Klein puede pasar de fuera hacia adentro sin atravesar la propia superficie (siempre pensando en el espacio de cuatro dimensiones, que es donde realmente se encuentra).

Otra propiedad de la botella de Felix Klein es que si se corta adecuadamente, se pueden obtener dos bandas de Moebius (figura 8).

MÚNICH Y LOS MODELOS MATEMÁTICOS

La idealización y construcción de modelos matemáticos fue una actividad que ya practicaba Felix Klein antes de su creación de la famosa superficie que lleva su nombre. Cuando abandonó Erlangen, en 1875, obtuvo una cátedra en la Universidad Técnica de Múnich, el mismo año en que contrajo matrimonio con Anne Hegel, nieta del filósofo alemán George Whilhelm Friedrich Hegel (1770-1831), «dando comienzo a una ordenada existencia», según escribiría años más tarde el propio Klein.

Botella de Klein descompuesta en dos bandas de Moebius.

Allí encontró al matemático Alexander Wilhelm von Brill (1842-1935), con el que compartió su pasión por los modelos matemáticos. Entre los dos fundaron un laboratorio para la fabricación de estos modelos, que llegaron a ser muy populares en la época. Su construcción llegó a ser parte del trabajo del Seminario de Matemáticas que organizaban los dos y muchos estudiantes contribuyeron con su trabajo realizando modelos que se utilizaban en sus disertaciones. Brill llegó a publicar, en 1880, un catálogo con los modelos que se construyeron en el laboratorio, y uno de sus hermanos, Ludwig Brill, fundó una empresa que comenzó a comercializarlos y a venderlos a Departamentos de Matemáticas a lo largo de todo el mundo.

Una de las obligaciones docentes de Klein en Múnich era dar clase de matemáticas a estudiantes de ingeniería. También lo era dar clases de geometría a futuros profesores y llegó a tener un pequeño número de estudiantes que querían especializarse en matemáticas, entre los que se encontraban futuros grandes matemáticos: los alemanes Adolf Hurwitz (1859-1919), Walther von Dyck (1856-1934), Carl Runge (1856-1927) y Max Planck (1858-1947); o los italianos Luigi Bianchi (1856-1928) y Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925). A la vez que se ocupaba de sus numerosos estudiantes, Klein continuó con su edición de los *Mathematische Annalen* y trabajó en álgebra y teoría de variable compleja, desarrollando su punto de vista geométrico de la teoría de Galois y preparando el camino para lo que sería, según sus propias palabras, su más profunda y original contribución a las matemáticas: la teoría de las «funciones automorfas». En ese momento, Felix Klein era considerado, de manera incuestionable, como uno de los mejores matemáticos alemanes.

PROFESOR DE GEOMETRÍA EN LEIPZIG

En 1880, cuando se encontraba en la cúspide de su capacidad de creación científica, rondando la treintena, Felix Klein se trasladó a Leipzig para ocupar una cátedra de Geometría. A pesar de que la Universidad de Leipzig era una de las más prestigiosas de Alemania, su Departamento de Matemáticas no era muy activo. Sin embargo, la llegada de Klein cambió por completo esta situación. Klein continuó trabajando en teoría de grupos, geometría y «funciones automorfas», que son un tipo especial de funciones complejas de variable compleja.

Para entender qué es una función automorfa, un concepto que fue extremadamente importante en el historial investigador de Felix Klein, o simplemente qué es una función de variable compleja, es necesario entender antes qué son los números «complejos».

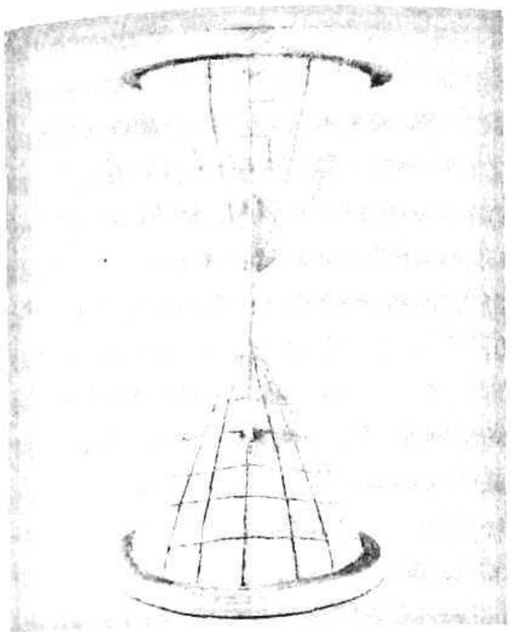
En matemáticas se utilizan diferentes conjuntos de números, dependiendo del tipo de problemas que se quieran tratar. Por ejemplo, si solo se quiere enumerar una cantidad de elementos, se utilizan los números «naturales», que son los que se usan para contar:

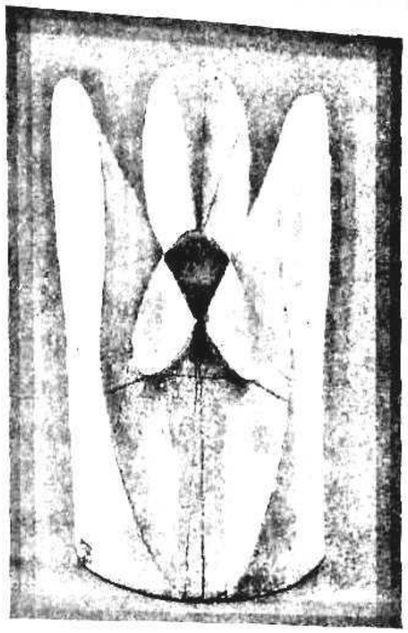
$$1, 2, 3, 4, 5,\ldots$$

Pero estos números se quedan cortos cuando se quiere llevar a cabo alguna operación que vaya más allá de la simple suma. Por ejemplo, con los números naturales no se puede expresar el resultado de sustraer al número 5 el número 7. Para ello, se necesitan los números negativos que, junto con el número 0 y los naturales, forman el conjunto de los números «enteros»:

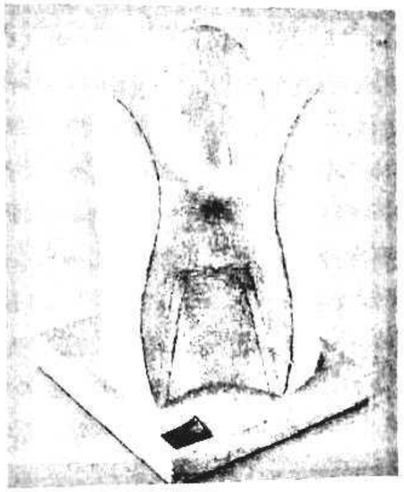
$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,\ldots$$

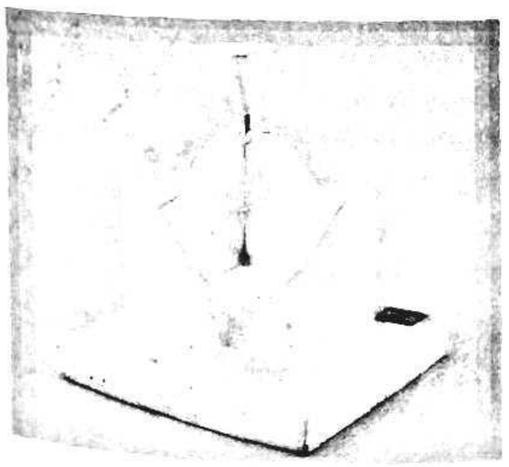
Pero muchos problemas cotidianos tratan de cantidades que no son enteras. Por ejemplo, si se quieren repartir 5 euros entre 4 personas, la cantidad de euros que corresponde a cada uno no es un número entero, sino un número fraccionario, el número 5/4, o bien su expresión decimal, es decir, 1,20 euros. Para que sea posible realizar todo este tipo de operaciones con fracciones de números enteros, se utiliza el conjunto de los números «racionales», que lo constituyen todos los números que son de la forma p/q, donde p y q son números enteros, con q distinto de cero. De esta forma, en cada paso, se van ampliando los conjuntos numéricos, de manera que cada conjunto de números contiene al anterior. Por ejemplo, el número racional 12/3, además de ser racional, también es el resultado de repartir 12 entre 3, que es el número entero 4.

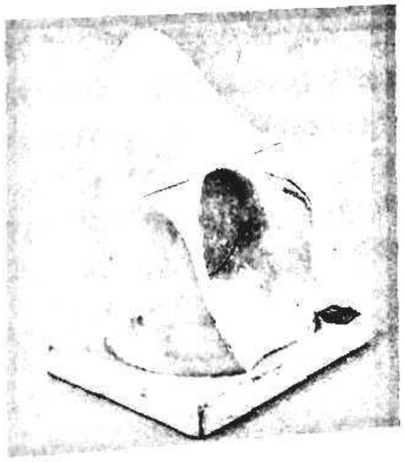




Modelos matemáticos de superficies de Brill y Klein procedentes del Museo della Scienza e della Tecnologia Leonardo da Vinci de Milán.







El paso siguiente es algo más complicado, desde el punto de vista conceptual, aunque ya lo dieron los griegos. Se trata de incorporar los números «irracionales» al sistema numérico. Como en los casos anteriores, surge un problema en el que los números racionales no son suficientes: el problema de calcular la longitud de la hipotenusa en ciertos triángulos rectángulos. Se considera el problema de determinar un número que, elevado al cuadrado, dé otro. Por ejemplo, el número que elevado al cuadrado sea 16 no ofrece ninguna dificultad; de hecho, con los números enteros es posible encontrar dos soluciones al problema, 4 y –4, ya que $4^2 = (-4)^2 = 16$. Sin embargo, la situación cambia si en lugar del número 16 se parte del número 2. En otras palabras, se quiere determinar el número $\sqrt{2}$. Este número aparece de manera natural al intentar calcular, utilizando el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos iguales que midan 1 y 1. El número corresponde a la longitud de un segmento, a un objeto geométrico que se puede construir, de manera que debe poderse expresar en términos numéricos. Sin embargo, no hay manera de expresar el número $\sqrt{2}$ como cociente de dos números enteros, es decir, como un número racional. Además, su expresión decimal, $\sqrt{2} = 1{,}414213562373\ldots$, no parece tener secuencias de números que se repitan, como ocurre con la representación decimal de cualquier número racional. Como ya se ha mencionado, los griegos lograron demostrar que este número no es racional, sino «irracional». También son irracionales los números número, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, el número π e infinitos más; de hecho, una cantidad mayor que la de números racionales. A la unión de los números racionales y los irracionales es a lo que se denomina conjunto de los números «reales».

Recta de los números reales.

FIG. 9

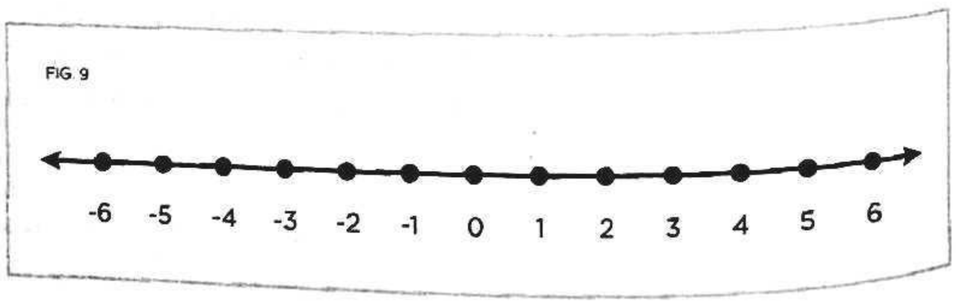
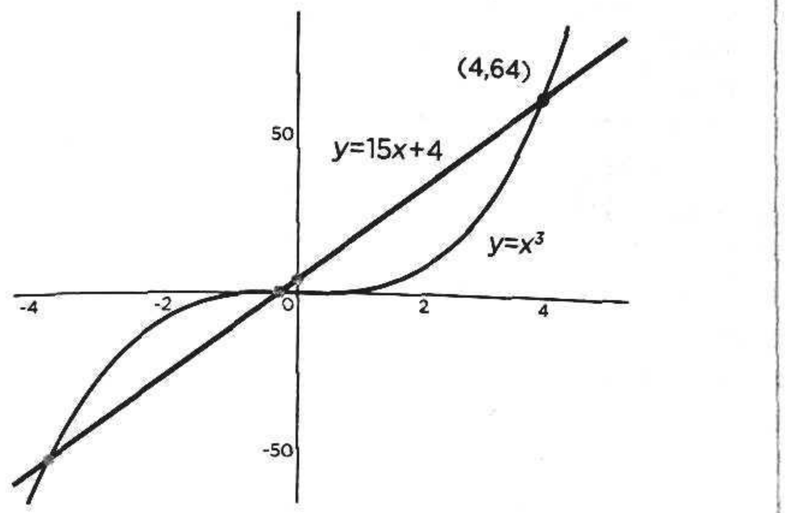


FIG. 10



Representación gráfica de la curva cúbica $y=x^3$ y de la recta $y=15x+4$.

Los números reales se pueden identificar con los puntos de una recta infinita, como en la figura 9, con los negativos a la izquierda y los positivos a la derecha, cada punto de la recta se corresponde con un número real y cada número real se corresponde con un punto de la recta.

Pero tampoco hay suficiente con los números reales. En efecto, los matemáticos italianos del Renacimiento que desarrollaron las técnicas para resolver la ecuación de tercer grado, Tartaglia (1499-1577), Del Ferro (1465-1526) y Cardano (1501-1576) ya se dieron cuenta de que había algunas complicaciones para aplicar su técnica a algunos ejemplos con soluciones sencillas. Por ejemplo, se puede verificar que $x=4$ es solución de la ecuación de tercer grado $x^3 - 15x - 4 = 0$. Por otra parte, si la ecuación se escribe de la forma $x^3 = 15x + 4$, el miembro de la izquierda es la ecuación de la curva cúbica $y = x^3$, y la del miembro de la izquierda es la correspondiente a la recta $y = 15x + 4$. Y las gráficas de ambas curvas se cortan, como se puede apreciar en la figura 10. De hecho, se cortan en tres puntos, por lo que la ecuación cúbica tiene tres soluciones.

Pero si se utiliza la fórmula de Cardano, vista en el primer capítulo, para la ecuación cúbica $x^3 + px + q = 0$, que se expresaba de la forma siguiente:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

el resultado que se obtiene es

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Sin embargo, para los matemáticos del Renacimiento la raíz cuadrada de un número negativo carecía de sentido. No obstante, treinta años después del descubrimiento de la fórmula de Cardano, el ingeniero y matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572) tuvo una idea audaz. Ciertamente para él el número $\sqrt{-1}$ no tenía sentido —de hecho, denominaba a las raíces de números negativos «cantidades salvajes»—, pero sí se podía admitir que al elevar al cuadrado ese objeto numérico se obtenía $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$. Suponiendo cierto lo anterior y efectuando algunas operaciones, se puede comprobar que $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2+\sqrt{-121}$, y de manera análoga, $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = 2-\sqrt{-121}$.

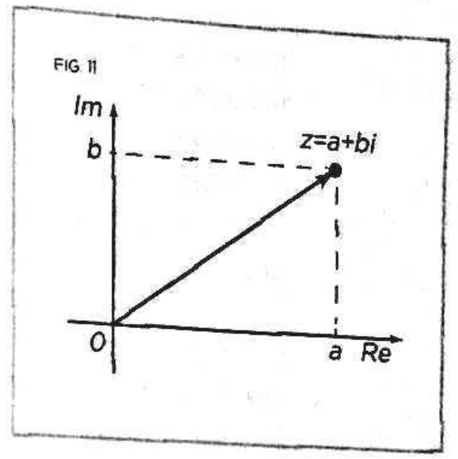
Como consecuencia, la solución de la ecuación cúbica es $x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4$. Así, la «cantidad salvaje» de Bombelli desaparece y da lugar al número 4. Bombelli había hecho uso por primera vez en la historia de las matemáticas de los «números complejos».

PLANO COMPLEJO Y VARIABLE COMPLEJA

En 1777, Leonhard Euler (1707-1783) comenzó a denominar con la letra i a la unidad de las raíces cuadradas negativas, $\sqrt{-1}$, y la denominó «unidad imaginaria». De esta forma, se pueden expresar en términos de la unidad imaginaria todas las raíces cuadradas de números negativos, por ejemplo, $\sqrt{-121} = \sqrt{121}\sqrt{-1} = 11i$. Y, como consecuencia, se pueden considerar números de la forma $3+4i$, que son los llamados «números complejos».

Tal y como ha ocurrido con todas las ampliaciones numéricas anteriores, los números complejos incluyen también a la clase de

números que teníamos anteriormente definida, que en este caso son los números reales, ya que cualquier número real, por ejemplo 7, se puede escribir de tal forma que adopte la forma de un número complejo, $0+7i$.



Plano de Argand.

El contable y matemático aficionado francés Jean-Robert Argand (1768-1822) expuso, en 1811, en un artículo publicado cuando regentaba una librería en París, una forma de representar los números complejos que sigue utilizándose hoy en día y que se denomina precisamente «plano de Argand» o «plano complejo». La idea de Argand consiste en representar en unos ejes coordenados las dos partes de cada número complejo $z = a+bi$ (figura 11). La «parte real», a, en el eje horizontal, llamado eje real. La «parte imaginaria», b, se representa en el eje vertical, llamado eje imaginario, como en la figura. Se puede entender el número complejo z como el punto de coordenadas (a,b) en el plano complejo o como el vector que une el origen con el punto.

De esta forma, el plano de Argand es una extensión bidimensional de la recta de los números reales.

Así como el «análisis real» estudia la teoría de las funciones de variable real, el «análisis complejo» estudia la teoría de las funciones en las que la variable es compleja. Una función compleja de variable compleja es una función que transforma números complejos, es decir, elementos del plano de Argand, en otros números complejos. Por ejemplo, la función $f(z) = z^2+2$ transforma el número complejo i en el número complejo 1, y el número complejo $1+i$ en el número complejo

$$f(1+i) = (1+i)^2+2 = 1+2i+(-1)+2 = 2+2i.$$

La geometría de las funciones complejas es bastante más complicada que la de las funciones de variable real. Por ejemplo, entre las funciones reales más importantes están las funciones periódicas, como la función trigonométrica $f(x) = \text{sen}(x)$. Se dice que es

periódica porque sus valores se repiten cada 2π unidades. En otras palabras, se puede comprobar que para todo valor de x se verifica $f(x)=\text{sen}(x)=\text{sen}(x+2\pi)=f(x)$. De esta forma, para tener determinada la función solo es necesario conocer sus valores en el intervalo $[0,2\pi]$; a partir de aquí, solo hay que repetir esos valores, como se puede observar en la figura 12.

Sin embargo, la generalización de estas funciones periódicas al caso complejo son las denominadas «funciones elípticas», un tipo de funciones también estudiado por Felix Klein. Una función elíptica $\wp(z)$ es una función compleja de variable compleja que tiene dos períodos complejos distintos, ω_1 y ω_2. Por lo que la función verifica $\wp(z)=\wp(z+\omega_1)=\wp(z+\omega_2)$ para cualquier valor de z. Geométricamente esto significa que, de manera análoga a como ocurre con las funciones periódicas reales, para conocer cómo es la función basta con saber cuáles son sus valores en un paralelogramo formado por los dos períodos ω_1 y ω_2 (figura 13). En el resto del plano complejo los valores de la función elíptica se repiten indefinidamente en paralelogramos trasladados iguales al paralelogramo inicial.

Las funciones automorfas son ciertas funciones complejas $f(z)$ que, entre otras propiedades, son invariantes bajo un grupo infinito numerable de transformaciones fraccionarias, denominadas

Representación gráfica de la función trigonométrica $f(x)=\text{sen}(x)$.

FIG. 12

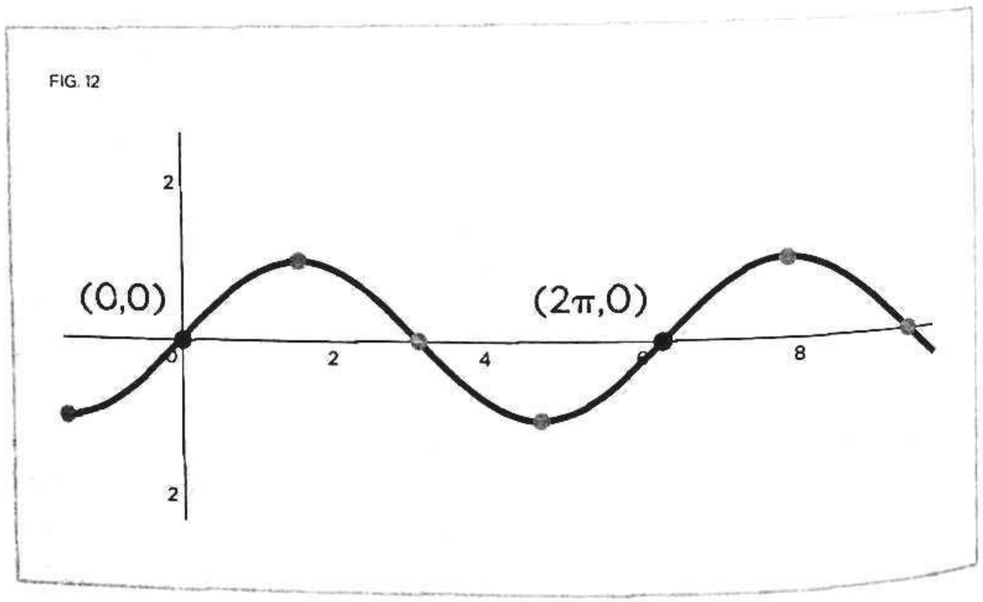
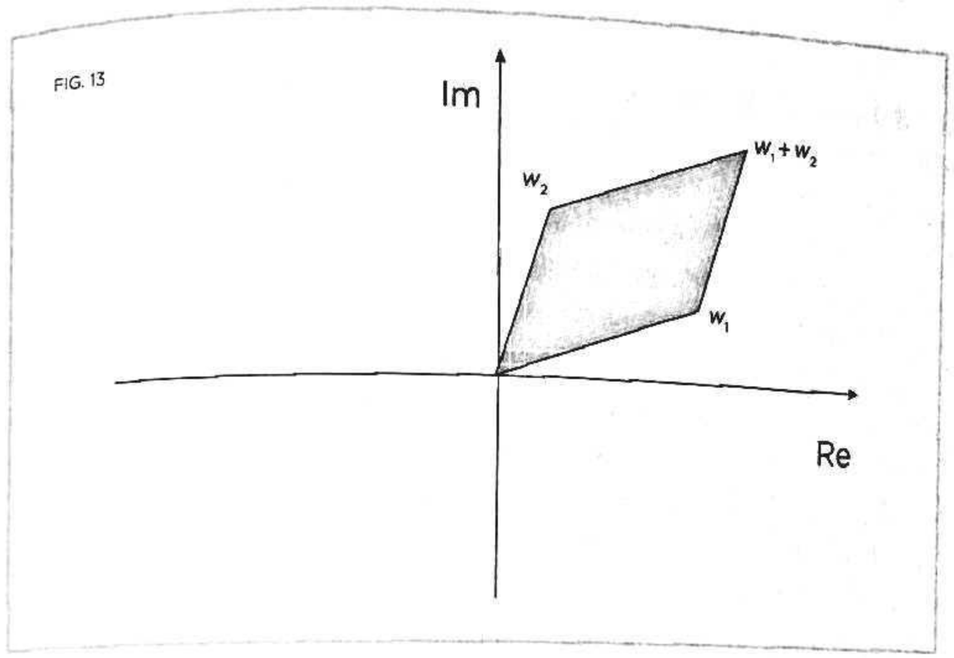


FIG. 13



«transformaciones de Moebius», que son transformaciones de la forma

$$z'=\frac{az+b}{cz+d},$$

donde a, b, c y d son números complejos.

KLEIN Y POINCARÉ

La teoría de funciones automorfas constituía una conjunción de ideas procedentes de la teoría de funciones de variable compleja, la teoría de grupos, la geometría no euclídea y la teoría de ecuaciones diferenciales. En este mismo campo de investigación, el de las funciones automorfas, se encontraba trabajando el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912). Poincaré había empezado a trabajar en este tema con ocasión de un concurso convocado por la Academia de Ciencias de París en 1879 en el que, por extraño que parezca, quedó en segundo lugar. Poincaré tenía un estilo visionario, lo que con frecuencia no era bien entendido por sus colegas. En una carta que el también matemático francés Charles

Hermite (1822-1901) escribió al matemático sueco Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), sobre los problemas que tenían para entender un artículo de Poincaré, decía:

> Pero hay que reconocer que en este trabajo y en casi todas sus investigaciones Poincaré muestra el camino y da las señales, pero deja mucho por hacer para llenar las lagunas y completar su trabajo. Picard le ha pedido a veces ilustraciones y ejemplos de puntos muy importantes de sus artículos en los *Comptes Rendus*, sin ser capaz de obtener nada excepto la frase: "es así, es de esa forma", de modo que parece como un vidente a quien las verdades se le aparecen con una luz intensa, pero fundamentalmente a él solo.

«El científico no estudia la naturaleza por la utilidad que le pueda reportar; la estudia por el gozo que le proporciona, y este gozo se debe a la belleza que hay en ella.»

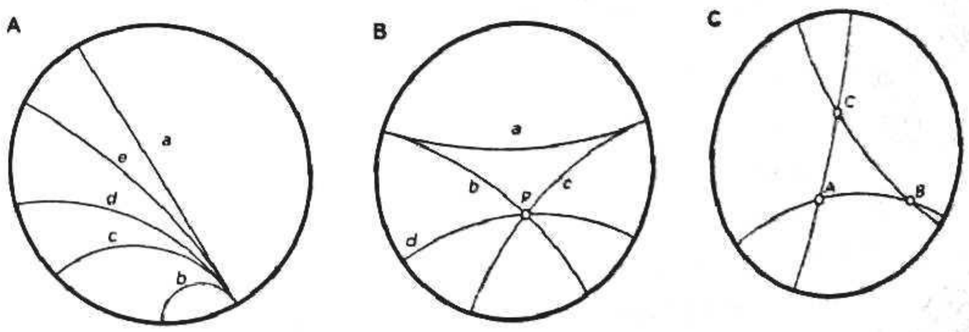
— **Henri Poincaré.**

Poincaré tenía cuatro años menos que Klein y era un matemático desconocido, mientras que Klein gozaba de gran fama en todo el mundo. Sin embargo, muy pronto Poincaré hizo tantos progresos que a Klein le resultó difícil seguir su ritmo. Entre los dos surgió una rivalidad por conseguir más y mejores resultados que acabó pasando factura a Klein. Después de publicar en 1882 algunos de sus hallazgos sobre superficies de Riemann, Klein cayó en una profunda depresión debido a la intensa labor. Por otra parte, su trabajo realmente era un anuncio que no pudo ser completado hasta años después de un profundo esfuerzo por parte de otros matemáticos. Años más tarde, Klein describió con las siguientes palabras el episodio de su depresión:

> El precio que tuve que pagar por mi trabajo fue extraordinariamente alto, mi salud se derrumbó por completo. En los años que siguieron, me vi obligado a tomar largas vacaciones y a renunciar a cualquier actividad productiva. Las cosas no empezaron a ir bien otra vez has-

EL DISCO DE POINCARÉ

Henri Poincaré fue un imaginativo matemático, físico y filósofo de la ciencia francés que contribuyó en prácticamente todos los campos de la matemática. El también matemáticofrancés Jean Gaston Darboux dijo de él que era un matemático intuitivo porque trabajaba con imágenes, no se preocupaba de ser riguroso y sentía aversión a la lógica. Creía que la lógica no era un buen camino para desarrollar ideas, sino una forma dé ordenarlas y estructurarlas después de ser concebidas.
Poincaré, tal y como hizo Klein, también ideó un modelo para la geometría hiperbólica, la geometría en la que por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una paralela y en la que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que 180 grados. Este modelo se denominaba «disco de Poincaré». De manera análoga a como ocurría con el modelo de Klein, los puntos del plano hiperbólico eran los puntos del interior de un círculo. Los puntos de la circunferencia no pertenecían al plano, eran los «puntos del infinito». Las «rectas» del modelo eran arcos de circunferencia de tal forma que su intersección con la circunferencia de los puntos del infinito se producía siempre perpendicularmente. También se consideraban «rectas» los diámetros. Por ejemplo, en la figura A se muestran varias rectas «paralelas», porque se cortan en un punto del infinito. En la figura B se observa una recta *a* y a través de un punto exterior *P* varias rectas que no cortan a la primera, es decir, varias rectas paralelas.



Disco de Poincaré.

ta el otoño de 1884, pero no he recuperado nunca mi antiguo nivel de productividad. Nunca he regresado para desarrollar mis primeras ideas. Y más tarde, en Gotinga, me dediqué a la ampliación de mi ámbito de trabajo y a la tarea general de organizar nuestra ciencia... Mi actividad realmente productiva en las matemáticas teóricas terminó en 1882. Todo lo que ha seguido, en la medida en que no ha sido puramente expositivo, no ha sido más que una cuestión de refinar los detalles.

Después de regresar de sus vacaciones en 1882, el geómetra Friedrich Schur (1856-1932), que trabajó como asistente de Klein, lo encontró tan agotado que supuso que no podría volver a las clases. De hecho, tuvo que dejarlas durante un mes para guardar reposo. Felix Klein no se recuperó completamente hasta 1884, a la edad de treinta y cinco años. A partir de ese momento dejó la primera línea de la investigación matemática, aunque, como se podrá ver en capítulos posteriores, siguió teniendo una actividad frenética en otros campos.

A muchos matemáticos y científicos a lo largo de la historia les ha ocurrido algo parecido; después de un corto período de intensa producción científica, han pasado a reducirla al mínimo, cuando no a dedicarse por completo a otros temas. De cualquier manera, incluso con una actividad científica a una velocidad menor, Felix Klein siguió consiguiendo resultados que han pasado a la historia.

LA ECUACIÓN DE QUINTO GRADO Y EL ICOSAEDRO

Uno de los primeros trabajos que hizo Klein en cuanto se recuperó fue volver al estudio de las soluciones de la ecuación de quinto grado. Según se ha visto en el primer capítulo, Abel y Galois probaron que la ecuación de quinto grado no se podía solucionar mediante una fórmula análoga a la fórmula con la que se resuelve la ecuación de segundo grado, es decir, una fórmula que suponga únicamente operaciones elementales con los coeficientes de la

ecuación. Pero esto no quiere decir que una ecuación de quinto grado no tenga solución o que no pueda resolverse. Por ejemplo, la ecuación de quinto grado $x^5 = 0$ tiene solución $x = 0$. La cuestión es que el procedimiento, el método para encontrar la solución, no se había encontrado.

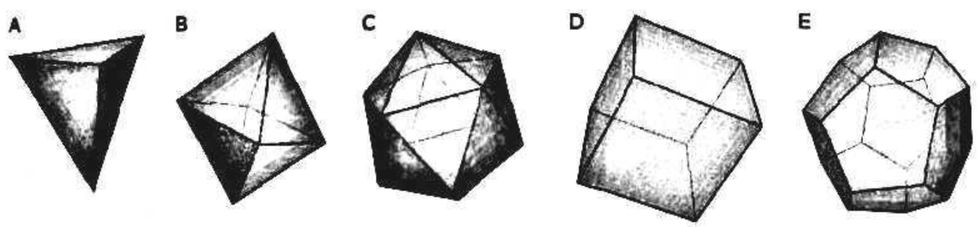
El problema de la ecuación de quinto grado no había permanecido olvidado desde que lo estudiasen Abel y Galois. El matemático francés Charles Hermite (1822-1901) logró resolverla utilizando un tipo de funciones especiales denominadas «funciones modulares elípticas» y el matemático alemán Leopold Kronecker (1823-1891) obtuvo la misma solución que había obtenido Hermite pero utilizando la teoría de grupos. Como siempre ocurre en ciencia, todo este trabajo previo, además del que ya había empezado a hacer el propio Klein cuando se encontraba aún en Erlangen, le llevó a idear un método realmente original e interesante en el que relacionó las simetrías del icosaedro, la teoría de Galois y las funciones modulares elípticas que ya aparecían en la solución de Hermite, y que son un tipo especial de funciones automorfas, la clase de funciones en la que él y Poincaré habían trabajado tan duramente años atrás.

El método de Klein fue publicado, en 1884, en el libro *Lecciones sobre el icosaedro y la solución de ecuaciones de quinto grado*. El título no puede ser más descriptivo de su contenido. El estilo pertenecía a esa escuela matemática alemana, de la que Klein era uno de los máximos exponentes, siguiendo a uno de sus grandes maestros, Clebsch, que tenía una extraordinaria habilidad para convertir un problema algebraico en uno geométrico. En el prefacio del libro, Klein agradece a su amigo Sophus Lie, que en ese momento se encontraba en Christiania (Oslo), todo su trabajo juntos, incluso recuerda su viaje a París cuando eran estudiantes.

Un icosaedro regular es un poliedro regular cuyas veinte caras son triángulos equiláteros y tal que en cada vértice concurren cinco triángulos. Primero Klein probó que existían exactamente 60 rotaciones que hacían que el icosaedro quedara como en su inicio. Estas rotaciones formaban un grupo de simetrías. Finalmente, demostró que ese grupo era «isomorfo», es decir, que tenía la misma estructura que un grupo especial de «permutaciones» (cambios de

SÓLIDOS PLATÓNICOS

El icosaedro regular es uno de los cinco llamados «sólidos platónicos». Realmente puede haber icosaedros regulares no convexos, con alguno de los vértices metido hacia adentro, pero cuando se habla de sólidos platónicos, se entiende que todos son convexos. Los otros cuatro sólidos platónicos son el «tetraedro», cuyas cuatro caras son triángulos equiláteros; el «octaedro», que está constituido por ocho triángulos equiláteros; el «cubo», formado por seis cuadrados, y el «dodecaedro», formado por doce pentágonos regulares. Mientras que es posible construir polígonos regulares planos de cualquier número de lados mayor que dos, en el espacio solo es posible encontrar estos cinco poliedros regulares, los cinco sólidos platónicos. Se llaman así porque fue Platón quien, en su diálogo *Timeo* los describió detalladamente.
Platón identificó los sólidos platónicos con el fuego, el aire, el agua, la tierra y la forma del universo. Esta última idea fue reformulada por el astrónomo y matemático Johannes Kepler (1571-1630), quien, en su obra *Mysterium cosmographicum*, publicada en 1596, proponía un sistema solar en el que los cinco sólidos platónicos moldeaban la estructura del universo conocido en la época. Los sólidos se inscribían en esferas que encajaban una dentro de otra. Esta idea, a pesar de la belleza que Kepler observaba en ella, fue abandonada años más tarde para proponer sus famosas leyes según las cuales los planetas no se movían en círculos ni esferas sino en elipses.



Sólidos platónicos: A) tetraedro, B) octaedro, C) icosaedro, D) cubo y E) dodecaedro.

orden) de las cinco posibles soluciones de la ecuación de quinto grado. Así pues, ligó las rotaciones, las simetrías del icosaedro con las simetrías de las soluciones de la ecuación de quinto grado, y esto proporcionó la respuesta definitiva sobre la razón por la que la ecuación de quinto grado se podía resolver mediante funciones elípticas, como habían conseguido hacer Hermite y Kronecker. Con este trabajo, Klein no solo resolvió el problema de la ecuación

de quinto grado, sino que se ponía de manifiesto que la teoría de grupos y el estudio de la simetría, que comenzó Evariste Galois y estudiaron y desarrollaron Sophus Lie y él mismo, iban a llegar mucho más allá de las aplicaciones geométricas y algebraicas. La simetría trascendía el campo de la matemática pura y llegaría a la física y a la búsqueda de teorías cosmológicas de unificación.

En efecto, hoy en día la teoría de grupos se aplica allá donde resulta necesario estudiar la formación de patrones en el mundo natural. La simetría y la teoría de grupos ocupan un lugar central en la física moderna, en el mundo cuántico de lo muy pequeño y en el mundo relativista de lo muy grande. En la base de la teoría de la relatividad de Albert Einstein reside el hecho de que las leyes de la física deben ser las mismas en todo lugar y en todo tiempo. Es decir, las leyes deben ser simétricas con respecto del movimiento en el espacio y el paso del tiempo. La física dice que todo en el universo está construido a partir de una colección de partículas fundamentales. El comportamiento de estas partículas se rige por ecuaciones matemáticas, por leyes de la naturaleza, y estas poseen simetría. Las partículas pueden ser transformadas «matemáticamente» en otras partículas, pero estas transformaciones deben dejar inalterables las leyes de la física y, como afirmaba Hermann Weyl, cuando algo permanece después de haberle aplicado alguna transformación es que detrás de esa transformación hay simetría.

A pesar de las ideas abstractas que hay detrás de la teoría de grupos, esta puede proporcionar técnicas que permiten realizar predicciones cuantitativas y verificables acerca del comportamiento de los átomos, las moléculas y las sustancias químicas.

LAS OFERTAS DE BALTIMORE Y GOTINGA

Es interesante destacar que, durante su depresión, Felix Klein recibió una importante oferta para ir a trabajar a Estados Unidos. Le ofrecieron un puesto en la Universidad Johns Hopkins de Baltimore, en el estado de Maryland. La universidad había comenzado a

funcionar en 1876, gracias al mecenazgo del millonario que le dio nombre y logró atraer a científicos de primera línea, como el matemático británico James Joseph Sylvester. Sin embargo, Sylvester dejó su puesto en Baltimore en 1883 porque quería regresar a Inglaterra y sugirió a Felix Klein como su sucesor. El matemático tenía sus dudas pero finalmente aceptó la oferta gracias a los consejos de su amigo Sophus Lie, quien le animó, mostrándole que le haría bien un cambio de aires y alejarse de Alemania, donde no mantenía buenas relaciones con Weierstrass. No obstante, las condiciones económicas que puso Klein no fueron aceptadas por la Universidad de Baltimore.

En 1886 llegó una propuesta que Felix Klein llevaba esperando desde hacía tiempo: un puesto como catedrático en la Universidad de Gotinga, y en este caso sí aceptó inmediatamente. Felix Klein consiguió en Leipzig convertir el Departamento de Matemáticas de su universidad en uno de los más activos mundialmente en investigación y consolidar una escuela de geometría en ella. También propuso como sucesor en su puesto a Sophus Lie, algo que aceptó la Universidad de Leipzig, consiguiendo traer a Lie a Alemania, lo que le permitía trabajar con él de una manera más directa.

SOPHUS LIE EN LEIPZIG

Sophus Lie, el amigo de juventud de Klein, llegó a Leipzig a mediados de abril de 1886, a la edad de cuarenta y cuatro años, y permaneció allí hasta 1898. Durante la época que pasó en Leipzig, logró el reconocimiento a su trabajo matemático, un reconocimiento que no había conseguido en Oslo, aunque Klein había intentado ayudarle enviando allí a uno de sus colaboradores, Friedrich Engel (1861-1941), para trabajar con él. Las matemáticas de Lie eran innovadoras, pero no eran valoradas como merecían, quizá porque se encontraba algo aislado en Oslo, o porque sus artículos no eran fáciles de entender debido a su estilo al escribir; también quizá porque su enorme intuición geométrica excedía la capacidad de otros matemáticos de la época.

En Leipzig, donde Klein había conseguido hacer surgir un interés por la investigación matemática y gracias al propio hecho de estar cerca de su amigo, Lie consiguió publicar algunos de sus mejores trabajos. Además de convertirse en catedrático de Matemáticas, llegó a ser el responsable del Seminario de Matemáticas que Klein había fundado seis años antes. Este Seminario funcionaba de hecho como un instituto independiente de investigación en geometría. En 1890 Sophus Lie era uno de los cinco catedráticos de Matemáticas que había en Leipzig; sin embargo, de los más de cincuenta estudiantes que estudiaban el doctorado de matemáticas, venidos de diferentes partes del mundo, más de la mitad estudiaban con él.

No obstante, Lie nunca se sintió satisfecho con el reconocimiento que recibía su trabajo en Leipzig y su salud mental se fue deteriorando con el paso de los años. En 1892 tuvo lugar la ruptura definitiva con Klein. Lie pensaba que el programa de Erlangen había llegado a tener importancia y repercusión internacional debido a su trabajo más que al del propio Klein. Lie atacó a Klein públicamente en el prólogo de su trabajo sobre grupos de transformaciones. Lo cierto es que los colaboradores de Lie empezaron a encontrar difícil tratar y trabajar con él. Además, los ataques de Lie a Klein, una figura que lideraba la investigación matemática en Alemania, reconocida internacionalmente, no hicieron más que volverse en su contra. A pesar de todo, Felix Klein continuó defendiéndolo y llegó a justificar su comportamiento aduciendo que el genio y la locura en matemáticas a veces van de la mano. Una defensa que puede que no beneficiase a Lie sino todo lo contrario.

Sophus Lie regresó a Oslo en 1898 a ocupar una plaza creada específicamente para él por el Parlamento noruego, pero su salud fue empeorando y falleció al año siguiente.

CAPÍTULO 4

Gotinga, destino de grandes matemáticos

Gotinga fue durante muchos años punto de peregrinaje de grandes matemáticos. Era el lugar donde había que ir si se quería estar en contacto con las mejores ideas matemáticas del momento. Esta tradición, que había comenzado con Gauss, Dirichlet y Riemann, llegó a su cumbre con Felix Klein, quien añadió el nombre de David Hilbert a la lista de los genios que hicieron de Gotinga el destino de los grandes matemáticos.

Gotinga es una pequeña ciudad de algo más de ciento veinte mil habitantes. Se encuentra en la Baja Sajonia, cerca del monte Hainberg, lugar de paseo de legendarios matemáticos y científicos. Está situada a más de 300 kilómetros de Berlín y, a primera vista, no parece un lugar en el que durante muchos años floreciera una actividad matemática que no ha vuelto a repetirse en otros lugares y en otros momentos de la historia de la ciencia.

La Universidad de Gotinga fue fundada en 1737 por Jorge II Augusto, el príncipe elector de Hannover y rey de Inglaterra, debido a lo cual se la conoce también con el nombre de «Georgia Augusta». Aunque comenzó con cuatro facultades, muy pronto se convirtió en una de las universidades más prestigiosas de Europa. En sus aulas estudiaron e impartieron clase relevantes científicos y matemáticos.

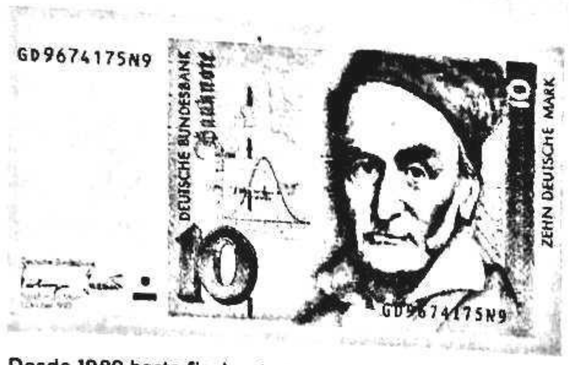
Quizá el nombre más legendario entre los grandes matemáticos que dieron esplendor a Gotinga sea el de Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss había presentado como tesis doctoral la demostración del «teorema fundamental del álgebra», según el cual toda ecuación polinómica con coeficientes reales o complejos tiene, al menos, una raíz compleja. Por ejemplo, la ecuación $z^2+1=0$ no tiene soluciones que sean números reales pero si se sustituye z por i, siendo $i=\sqrt{-1}$ la «unidad imaginaria» de los números complejos, sí tiene solución. De hecho, tiene dos soluciones: i, $-i$.

También realizó importantes aportaciones a la teoría de números y se interesó por la astronomía. El primer día del siglo XIX apareció en el cielo un asteroide o planeta enano al que se puso de nombre Ceres, pero al cabo de unas semanas dejó de verse. Gauss inventó un método para el cálculo de las órbitas de cuerpos celestes a partir de un número pequeño de observaciones, conocido hoy en día como «método de Gauss» y utilizado para seguir trayectorias de satélites artificiales. Gauss tuvo un éxito enorme con su método porque a finales de año Ceres apareció casi exactamente en el lugar que él mismo había calculado. Sin duda, este logro, entre otros, contribuyó a que fuera nombrado, en 1809, director del Observatorio Astronómico de la Universidad de Gotinga, puesto que mantuvo durante cuarenta años. Durante todo este tiempo se dedicó a la astronomía, la física y las matemáticas, consiguiendo avances notables en todos los campos.

Gauss podría perfectamente haber ocupado una cátedra de matemáticas en la universidad pero no sentía pasión por la enseñanza, prefería dedicarse a algunos alumnos brillantes a los que ayudaba y desde su puesto como director del observatorio dominaba y controlaba las matemáticas en Gotinga. No obstante, todos esos alumnos a los que ayudó, bien a través de clases personalizadas o a través de correspondencia, llegaron a ser famosos matemáticos. Tal es el caso de Richard Dedekind (1831-1916), Bernard Riemann, que acabaría ocupando una cátedra de matemáticas también en Gotinga, o la matemática francesa Sophie Germain (1776-1831).

Sophie Germain comenzó a cartearse con Gauss después de leer sus *Disquisitiones aritmeticae*, pero lo hizo bajo pseudónimo, «Sr. Le Blanc». Dos años después, se produjo la invasión napoleónica de Prusia. Germain era una persona con contactos e influyente en la política francesa y temía que a Gauss le pudiera ocurrir algo, de manera que intercedió ante uno de los generales de Napoléon para que hiciese lo posible por protegerle. El general localizó al matemático alemán y se ocupó personalmente de su seguridad, diciéndole quién era su protectora. Pero Gauss no conocía a ninguna mujer francesa que se llamase Sophie Germain, hasta que esta decidió escribirle y revelarle su identi-

FELIX KLEIN Y EL DIARIO DE GAUSS



Desde 1989 hasta finales de 2001, el retrato de Gauss fue impreso en los billetes de 10 marcos alemanes.

Carl Friedrich Gauss nació en Brunswick en 1777. Fue un niño prodigio del que se cuentan numerosas anécdotas sobre sus hazañas con los números desde su infancia. Gauss siempre comentaba que había aprendido a contar antes que a hablar. A pesar de que su origen era muy humilde, gracias a la recomendación de sus maestros, recibió del duque de Brunswick el apoyo necesario para poder estudiar y en 1795 ingresó en la Universidad de Gotinga. Tuvo una formación preuniversitaria muy orientada a los estudios clásicos y estuvo dudando entre dedicarse a la filología o las matemáticas, a pesar de que cuando ingresó en Gotinga ya había desarrollado importantes técnicas en esta última disciplina. La decisión definitiva para dedicarse a las matemáticas la tomó el 30 de marzo de 1796, debido a que ese día hizo un brillante descubrimiento. Desde la antigüedad se conocía cómo dibujar con regla y compás el triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono y otros polígonos regulares con un número de lados múltiplo de dos, tres o cinco. Sin embargo, no se sabía construir ningún otro polígono regular con un número primo de lados. Gauss fue capaz de representar el polígono de 17 lados. A partir de ese mismo día comenzó a anotar sus descubrimientos matemáticos en un diario. Gauss siempre estuvo muy orgulloso de su hallazgo, tanto que expresó su deseo de que en la lápida de su tumba se grabase un polígono regular de 17 lados, algo que no se llevó a cabo finalmente porque el cantero encargado se negó aduciendo que el polígono no se distinguiría de una circunferencia.

A Gauss no le gustaba demasiado escribir para comunicar sus descubrimientos e invenciones matemáticas; sus obras no son todo lo numerosas que deberían haber sido si atendemos a su ingente actividad creadora. Una prueba de esto es el hecho de que no publicó nada sobre su desarrollo de la geometría no euclídea. Afortunadamente fue dejando un registro, a veces casi telegráfico, en su diario. Realmente no ocupa más de 20 páginas y permaneció perdido entre los papeles de la familia hasta 1898, año en que fue cedido por un nieto de Gauss para que fuese conservado en los archivos de la Universidad de Gotinga. En 1901 se publicó su contenido en un volumen extensamente anotado y la edición corrió a cargo de Felix Klein.

dad. A pesar del temor inicial de Germain de que Gauss pudiese sentirse ofendido ante esta circunstancia, no fue así, sino que continuaron teniendo contacto y, aunque dejaron de escribirse en cuanto Gauss empezó a interesarse por temas de la matemática aplicada, siempre mantuvo una gran admiración por su colega francesa y, poco antes de su fallecimiento, propuso que Gotinga otorgase un doctorado *honoris causa* a Sophie Germain.

Después de haber realizado importantes contribuciones en todos los campos de la ciencia en los que se interesó, Gauss falleció en 1855. Tras su muerte fue honrado con el título póstumo «Princeps mathematicorum», el Príncipe de los matemáticos.

«Gauss se me antoja semejante a las altas cimas de nuestras montañas bávaras.»

— FELIX KLEIN, EN *LECCIONES SOBRE EL DESARROLLO DE LA MATEMÁTICA EN EL SIGLO XIX.*

Uno de los textos más famosos que Gauss escribió, antes de empezar a trabajar en Gotinga, fueron sus *Disquisitiones arithmeticae*, como ya se ha mencionado, un tratado sobre la teoría de números que escribió a los veintiún años. Gauss recogió todos los conocimientos sobre la teoría de números hasta la fecha, añadiendo algunos de sus propios descubrimientos. Con la ayuda de esta obra se formaron muchos matemáticos en teoría de números, entre ellos Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), un matemático alemán formado en París. Dirichlet realizó sus propias aportaciones a la teoría de números; probó, por ejemplo, el «último teorema de Fermat» para los casos particulares de $n=5$ y $n=14$. Este teorema afirma que si n es un entero mayor que 2, entonces no es posible encontrar números enteros positivos x, y, z tales que verifiquen la ecuación $x^n+y^n=z^n$. El trabajo de Dirichlet logró la admiración de Gauss, quien llegó a escribirle una carta de recomendación que le ayudó a obtener una plaza como profesor en la Universidad de Breslavia, en la región de Silesia.

En el mismo año en que falleció Gauss, Dirichlet asumió la cátedra de Gotinga con mucha ilusión ya que dispondría de más

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN MATEMÁTICAS

El término «función», junto con los términos «variable», «constante» y «parámetro», fue introducido en matemáticas por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Aunque la idea de función como objeto matemático independiente había sido estudiada también por Isaac Newton (1643-1727) y por René Descartes (1596-1650). Para estos matemáticos, una función era un objeto que se podía representar mediante una expresión analítica que permitía calcular sus valores; por ejemplo, la expresión $A=\pi r^2$, que relaciona el radio r con el área de un círculo, A, era una función que permitía calcular los valores de A, dados los valores de r. Más aún, la función tenía que ser continua, ya que para ellos no tenía sentido como función una «función definida a trozos» como:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}.$$

El concepto moderno de función entre conjuntos numéricos se debe a Dirichlet, que lo definió de la forma en la que se sigue enseñando hoy en día: «Una función es una regla o ley que asigna a cada número real x, de un cierto conjunto denominado dominio de definición, un único valor real $f(x)$». Un ejemplo que verifica esta definición es la «función de Dirichlet», que se expresa de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

La función de Dirichlet no es continua en ningún punto, porque los números racionales y los números irracionales están mezclados en la recta real, de tal forma que entre dos racionales siempre hay un irracional y entre dos irracionales siempre se puede encontrar algún racional. Esto hace que ni siquiera podamos representar gráficamente la función de una forma clara, una idea inconcebible antes de Dirichlet.

tiempo para investigar y dedicarse a sus estudiantes. Dirichlet era un excelente profesor y disfrutaba enseñando; sin embargo, no pudo disfrutar mucho tiempo de la tranquila vida de Gotinga. Durante el verano de 1858, en un viaje a Montreaux (Suiza) para dar unas conferencias, sufrió un ataque al corazón. Poco después falleció su esposa, Rebecka Mendelssohn, hermana del compositor

Felix Mendelssohn, lo que unido a su estado de salud provocó que Dirichlet muriera también en 1859.

A Dirichlet le sucedió Bernhard Riemann, quien fue uno de esos pocos alumnos elegidos por Gauss para enseñarles matemáticas. Después de estudiar en Berlín, Riemann volvió a Gotinga en 1849. Dos años más tarde leyó su tesis doctoral, supervisada por el propio Gauss, en la que planteó por primera vez el problema conocido como «hipótesis de Riemann» y que aún no ha sido resuelto. En otoño de 1857, con treinta y un años, Riemann fue nombrado profesor extraordinario en Gotinga, y según describe Felix Klein en sus *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*, «probablemente a instancias de Dirichlet, que en cualquier caso intervino vivamente en su favor». En 1859, tras el fallecimiento de Dirichlet, obtuvo la plaza vacante que este había dejado. En Gotinga, trabajó en geometría y en física matemática. El modo de entender la matemática de Riemann tuvo una enorme influencia en Felix Klein, que se sentía fascinado por la forma intuitiva de las demostraciones de este. De hecho, en 1892, cuando Klein ya llevaba unos años en Gotinga, escribió un texto sobre las superficies de Riemann dando su propia versión sobre los trabajos de este pero con el mismo espíritu. Hans Freudenthal (1905-1990) escribió sobre el libro de Klein: «Es un libro precioso, y sería interesante saber cómo fue recibido en su época. Probablemente muchos se sintieron ofendidos por su falta de rigor». Riemann enfermó en 1862, poco después de casarse, a consecuencia de un fuerte resfriado. Consiguió una beca del gobierno para viajar a Italia, algo que le habían recomendado los médicos, y que aprovechó para convertir también en un viaje científico, pero la enfermedad se agravó y acabó falleciendo el día 20 de julio de 1866, en Selasca, junto al lago Mayor.

HIPÓTESIS DE RIEMANN

De entre todos los números naturales: 1, 2, 3, 4..., los llamados «números primos», es decir, aquellos que no pueden expresarse como el producto de dos números más pequeños, por ejemplo: 2, 3, 5, 7, 11, 13..., siempre han resultado apasionantes y misteriosos para matemáticos y aficionados a las matemáticas. Se sabe que existen infinitos y que Euclides encontró una demostración muy ingeniosa de este hecho mediante reducción al absurdo. Se supone que hay una cantidad finita de números primos y, a partir de esa cantidad finita, siempre se puede construir un nuevo número primo, lo que contradice la suposición inicial. Pero no todas las propiedades de estos números se han conseguido demostrar. Por ejemplo, se sabe muy poco sobre su distribución, sobre la manera en la que van apareciendo; podemos encontrar algunos muy cercanos los unos a los otros, pero a veces hay que contar muchos números hasta encontrar un nuevo primo, es decir, no parecen seguir ningún patrón regular.
Bernhard Riemann observó que la frecuencia con la que van apareciendo los números primos estaba estrechamente relacionada con el comportamiento de la función

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots,$$

donde s es un número complejo. Esta función es conocida actualmente como la «función Zeta de Riemann». La «hipótesis de Riemann» asegura que todas las soluciones de la ecuación $\zeta(s) = 0$ son números complejos de la forma $s = \frac{1}{2} + it$, donde t es un número real. La hipótesis ha sido comprobada a lo largo de miles de millones de casos particulares, pero nadie, a día de hoy, sabe si es cierta en general.
La hipótesis de Riemann es uno de los seis problemas del milenio sin resolver (había 7, pero uno ya se resolvió, la conjetura de Poincaré), para los que la Fundación Clay estableció un premio de un millón de dólares.

> «Si yo me despertara después de haber dormido durante mil años, mi primera pregunta sería: "¿Ha sido demostrada la hipótesis de Riemann?".»
>
> — DAVID HILBERT.

El sucesor natural de Riemann en Gotinga habría sido Richard Dedekind (1831-1916), un brillante matemático que ideó una nueva manera de entender cómo se construyen los números reales. Sin embargo, Dedekind era una persona poco ambiciosa a quien no le interesaban puestos con responsabilidad como el que hubiera tenido que ocupar en Gotinga. La tradición matemática iniciada con Gauss parecía que empezaba a truncarse.

Después de la muerte de Riemann, y hasta la instalación definitiva de Klein, Gotinga solo tuvo un pequeño período en el que volvió a resplandecer, la época en que estuvo como catedrático Alfred Clebsch el fundador, junto con Carl Neumann de los *Mathematische Annalen*. Fue el período entre 1868 y 1872, durante el cual Clebsch llegó a establecer una importante escuela de geometría algebraica, época en la que Felix Klein hizo su primera visita científica a Gotinga.

KLEIN LLEGA A GOTINGA

Desde el principio, Felix Klein acogió con ilusión la oferta de trasladarse a Gotinga. La perspectiva de trabajar en una universidad con una tradición matemática como la descrita era para él la principal prioridad. En sus notas personales escribió: «casa con jardín, obligaciones profesionales más ligeras, Prusia...». Una de las personas que más hizo para llevar a Klein a Gotinga fue Friedrich Althoff (1839-1908), ministro de Educación de Prusia en aquella época, quien había sido compañero de Klein en el ejército durante su breve servicio en la guerra franco-prusiana y había seguido de cerca su carrera desde entonces. Althoff estaba convencido de que, apoyando a Klein, Gotinga no solo recuperaría su antiguo esplendor en matemáticas, sino que lo superaría y, además, podía resultarle útil para llevar a cabo las reformas educativas que planeaba para el sistema educativo prusiano.

A su llegada, Klein se encontró con Hermann Amandus Schwarz (1843-1908) y Ernst Schering (1824-1897), los catedráticos del Departamento de Matemáticas que controlaban Gotinga. El jefe del departamento era Schwarz, que había estudiado inicialmente química en Berlín, aunque fue convencido por Weierstrass para reconducir sus estudios a las matemáticas y así lo hizo. Precisamente fue Weierstrass quien supervisó la tesis doctoral de Schwarz, haciendo después importantes aportaciones al análisis matemático. De manera que Klein no tuvo precisamente una calurosa acogida a su llegada a Gotinga. Sin embargo, la actividad de

Klein, incluso después de su depresión debido al intenso trabajo que le había supuesto intentar estar al mismo nivel científico que Poincaré, volvía a ser frenética.

Uno de los alumnos que Klein había tenido en su etapa como profesor en Gotinga, y posteriormente en Leipzig, fue su sobrino, Robert Fricke (1861-1930), quien hizo con él su tesis doctoral y cuya memoria, sobre funciones elípticas modulares, fue presentada en 1885. Fricke se habilitó como profesor de Matemáticas para dar clase en los *Gymmnasium* y trabajó en varios de ellos durante un tiempo, aunque finalmente optó a un puesto académico en Gotinga con el objeto de estar más cerca de Klein. Gracias a esta colaboración, desde 1886 y durante varios años Fricke publicó con Klein el tratado de cuatro tomos *Lecciones sobre teoría de funciones modulares*. Se trata de unos textos clásicos, que incluso hoy en día siguen sirviendo como referencia a la hora de estudiar la moderna teoría de grupos discretos de Lie, aunque no son unos textos de lectura fácil, sino bastante técnicos, a diferencia de la mayoría de los textos de Klein, que, incluso actualmente, desprenden un estilo y una frescura que los hace agradables de leer.

La colaboración de Fricke con Klein se mantuvo durante muchos años en Gotinga. De hecho, Fricke fue el primer encargado de editar las obras completas de Klein y llegó a ocupar puestos administrativos importantes en la Universidad de Gotinga. Por ejemplo, llegó a ser el rector de la universidad en dos períodos, de 1904 a 1906, y también entre 1921 y 1923.

GOTINGA RENACE CON KLEIN

A pesar de toda la ilusión con la que Felix Klein había llegado a Gotinga, sus primeros años fueron un período frustrante en su carrera. Su intención era aprovechar la escuela matemática que ya había creado para convertir Gotinga en un nuevo tipo de centro de investigación, por una parte inspirado en los ideales de la tradición matemática de sus predecesores Gauss, Dirichlet y Riemann. Por otra, Klein quería atraer a Gotinga a los mejores inves-

tigadores y estudiantes de matemáticas, tanto de Alemania como del extranjero, algo que no había ocurrido en la época anterior. Su idea para Gotinga era la de un centro donde los matemáticos trabajasen e interaccionasen con físicos e ingenieros, incluso colaborasen en temas relacionados con la biología o la filosofía; un centro diferente a Berlín, que, dirigido por Weierstrass, era en aquella época el centro de matemática pura por excelencia. Pero estos intentos topaban con la oposición activa de sus colegas Schwarz y Schering. Tanto es así que hacia 1890 la situación se había deteriorado hasta el punto de que se sintió obligado a informar a Friedrich Althoff de que, en esas condiciones, no podía seguir trabajando con sus colegas. Klein decidió que, en el futuro, no contaría con ellos—, en particular con Schwarz, quien dirigía realmente el departamento y quien más oposición mostraba a sus nuevas ideas— y trataría directamente con las autoridades académicas de la universidad o con el ministerio, «de lo contrario caeré presa de su abrumadora política de obstrucción», escribía el propio Klein. Sin embargo, Althoff decidió no intervenir en asuntos que consideraba que se circunscribían al ámbito académico, lo que provocó que durante un tiempo Klein permaneciese arrinconado y sus planes para Gotinga tuvieran que posponerse.

Pero en 1892 ocurrió un suceso con el que Klein no contaba. Karl Weierstrass se retiraba de su cátedra de Berlín y Schwarz fue llamado para ser su sucesor, algo que aceptó inmediatamente. Klein se convertía así en la persona que iba a liderar el renacimiento de Gotinga como el centro de investigación matemática que había planeado durante tanto tiempo. En los años siguientes Gotinga llegaría a ser el centro de referencia de matemáticas y física de toda Alemania, por delante de Berlín, a pesar de los esfuerzos de Schwarz, que no pudo competir con el dinamismo de Klein.

HILBERT, EL HOMBRE DEL FUTURO

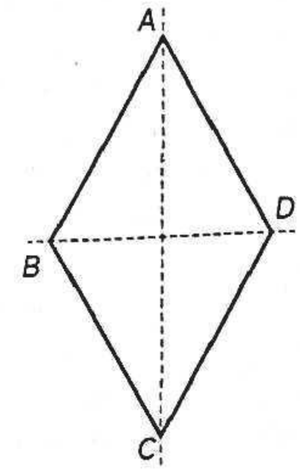
Cuando Schwarz se fue a Berlín para ocupar la cátedra de Weierstrass, Klein pensó en traer a Gotinga a dos jóvenes matemáticos:

GRUPOS DE KLEIN

Robert Fricke trabajó con Klein en el desarrollo de lo que hoy se conoce con el nombre de «grupos de Klein». El primer ejemplo que estudió Klein de este tipo de grupos y que él llamó *Vierergruppe*, es un grupo que contiene cuatro elementos, el elemento identidad y otros tres, entre los que se ha establecido una operación. Los elementos del grupo son $K_4 = \{1, a, b, ab\}$. El cuarto elemento, ab, es el resultado de multiplicar a por b, en ese orden. Además, en este grupo concreto, cada vez que se opera un elemento consigo mismo se obtiene la identidad, es decir, $aa=1$, $bb=1$, $abab=1$. Todas las operaciones que se pueden realizar entre los diferentes elementos del grupo vienen descritas en la llamada «tabla de Cayley» del grupo, que es como una «tabla de multiplicar» para los elementos de nuestro grupo, donde quedan reflejadas todas las reglas posibles.

.	1	a	b	ab
1	1	a	b	ab
a	a	1	ab	b
b	b	ab	1	a
ab	ab	b	a	1

El grupo de Klein se puede interpretar como un conjunto abstracto, pero también puede servir como modelo en otras situaciones. En un rombo pueden identificarse los elementos del grupo de Klein con las diferentes simetrías del rombo. El elemento 1 es la identidad, es decir, dejar el rombo tal cual está. Vamos a identificar el elemento a con la simetría respecto del eje AC, de manera que aplicar a al rombo consiste en doblar el rombo a lo largo del eje AC. Así, el punto B pasaría a estar donde ahora está el punto D y viceversa. Análogamente, el elemento b se identifica como la simetría respecto del eje BD. Como consecuencia, el elemento ab del grupo consiste en aplicar las dos simetrías respecto de los ejes, una tras otra. De esta forma, es fácil, y entretenido, comprobar que se verifican todas y cada una de las operaciones que aparecen en la tabla de Cayley del grupo. Como consecuencia, el grupo de simetrías de un rombo tiene la misma estructura que el grupo de Klein.



Simetrías de un rombo.

Adolf Hurwitz (1859-1919), que había sido alumno suyo en Leipzig, y David Hilbert (1862-1943), a quien había conocido en 1885 también en Leipzig, precisamente a través de Hurwitz, quien había animado a su colega a asistir a los cursos que Klein daba allí. Klein consideraba que eran los dos matemáticos capaces de asegurar que Gotinga fuese un lugar de distinción científica. Sin embargo, después de complejas negociaciones, no fue posible que ninguno de los dos candidatos fuera a Gotinga. En su lugar, ocupó la plaza Heinrich Weber (1862-1943), un excelente matemático y muy versátil, pero que a los cincuenta años ya había superado su etapa de máxima creatividad y; más aún, su personalidad y su estilo de investigación reflejaban los valores de la generación anterior. Le faltaba el dinamismo que Klein buscaba para Gotinga y, aunque se llevaban bastante bien, Klein no hizo nada para detenerlo cuando, en 1895, Weber se fue a Estrasburgo. A estas alturas Klein estaba completamente decidido a traer a Hilbert y, además, en 1895, su poder de decisión era mucho mayor que tres años antes. Klein escribió a Hilbert:

> ... probablemente no sabe usted todavía que Weber se va a Estrasburgo. El claustro de la facultad se reunirá esta tarde, y aunque poco puedo saber por adelantado qué es lo que recomendará la comisión, le informaré de que voy a hacer todos los esfuerzos para que nadie que no sea usted sea llamado aquí en primer lugar. Es usted el hombre que necesito como extensión científica; por la dirección de su trabajo, la potencia de su pensamiento matemático y el hecho de que ahora esté en la mitad de su carrera productiva. Calculo que dará una nueva fuerza interna a la escuela matemática de aquí, que ha crecido y parece que seguirá creciendo mucho más, y quizás ejercerá una influencia rejuvenecedora también en mí. Estas son las ideas con las que mis colegas y yo le daríamos la bienvenida. De hecho, no puedo saber si dominaré el claustro, y menos todavía si la recomendación que hagamos será respetada finalmente en Berlín. Pero debe usted prometerme una cosa, incluso hoy: que no declinará la llamada si le llega.

Y así fue, por fin. David Hilbert se incorporó al claustro de profesores de Gotinga en 1895. Lo cierto es que algunos de los

colegas de Klein no estuvieron muy de acuerdo en su elección y hubieran querido nombrar a un hombre más fácil de manejar. Klein respondió: «Quiero al más difícil de todos». Su opinión se impuso.

David Hilbert era, según Klein, el tipo de matemático que necesitaba Alemania, «el hombre del futuro», según sus propias palabras. Tenía personalidad, erudición y una amplitud de miras que le hacía interesarse por casi todas las ramas de las matemáticas, y ese precisamente era el ideal del nuevo matemático en el que pensaba Klein. Hilbert empezó en matemáticas aportando grandes contribuciones a la teoría algebraica de números. Después, realizó investigaciones sobre los fundamentos de la geometría, las ecuaciones integrales, la teoría de la relatividad, la lógica y los fundamentos de las matemáticas. Y en todas y cada una de estas áreas realizó importantes avances.

Hilbert y Klein tenían dos personalidades muy diferentes, pero formaron una de las parejas más productivas en ciencia que jamás haya existido. Los dos eran muy trabajadores. Klein era el hombre de la organización y Hilbert era el hombre de los problemas, alguien que pensaba que todo problema podía ser resuelto, solo era cuestión de dedicarle las suficientes energías. En palabras del propio Hilbert:

> Esta convicción en la solubilidad de todo problema matemático es un poderoso incentivo para el trabajo. Dentro de nosotros oímos la perpetua llamada: existe un problema, busca su solución. Uno puede encontrarla por la pura razón pues en matemática no existe *ignorabimus* [no sabremos].

Hilbert revolucionó la vida de la universidad a su llegada. El también matemático Richard Courant (1888-1972), hablando sobre aquellos tiempos en Gotinga, escribió:

> Si leemos las antiguas crónicas, un catedrático de la universidad era un semidiós muy consciente de su rango, el de catedrático, y también lo era, en particular, la esposa del catedrático. La llegada de Hilbert a Gotinga resultó muy molesta. Algunas de las esposas

de los catedráticos de más edad se reunieron y dijeron: «¿Te has enterado de este nuevo matemático que ha llegado? Está alterando toda la situación. La otra noche fue visto en un restaurante jugando al billar con algunos de los *Privatdozent*». [El *Privatdozent* ocupaba el rango más bajo de la universidad, puesto que esta no le pagaba nada; solamente cobraba el dinero que se le permitía recibir directamente de sus alumnos en pago de sus clases]. Se consideraba totalmente inaudito que un catedrático se rebajara a entablar amistad personal con personas más jóvenes. Sin embargo, Hilbert rompió con esta tradición, lo que significó un enorme paso adelante hacia la creación de la vida científica; los jóvenes estudiantes le visitaban en su casa y tomaban el té o cenaban con él. Hilbert preparaba grandes y copiosas cenas para los profesores ayudantes, estudiantes y otros. Hilbert salía con sus estudiantes, y con quien quisiera acompañarle, a realizar largas excursiones en los bosques durante las cuales se hablaba de matemáticas, de política y de economía.

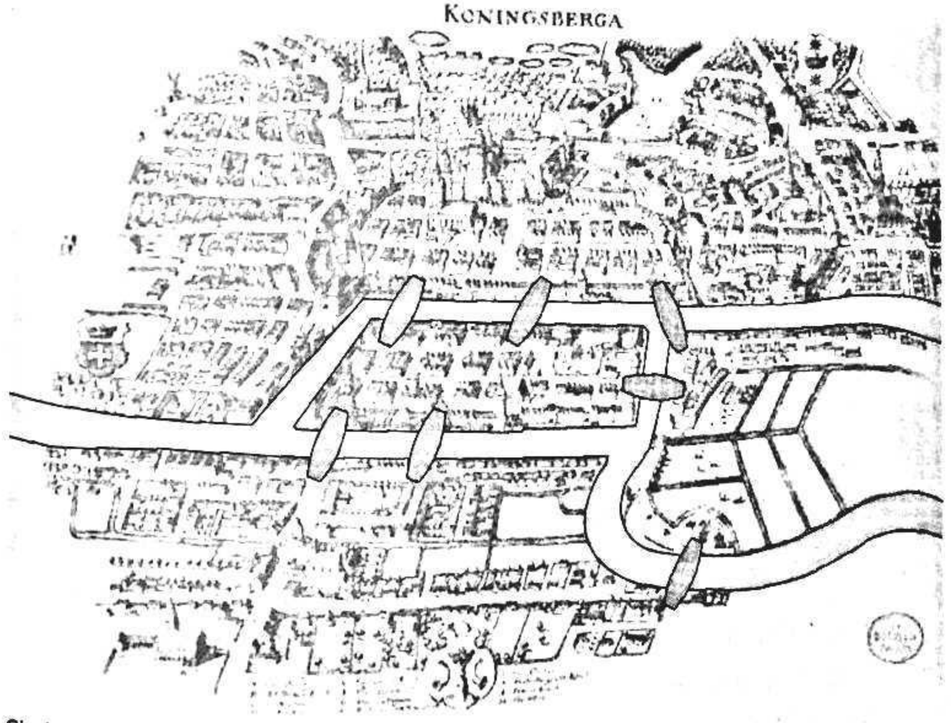
Hilbert permaneció en Gotinga hasta el final de sus días, dotando a su universidad de una fuerza y un prestigio, bajo la dirección de Klein, que ningún otro matemático de su época podría haber logrado.

El día 8 de agosto de 1900, David Hilbert participó en el Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) en París y dio una conferencia sobre problemas matemáticos en la que expuso los 23 problemas matemáticos sin resolver que, a su juicio, marcarían el quehacer matemático del siglo XX. Su legendaria intervención comenzó con las siguientes palabras:

> ¿Quién de nosotros no se alegraría de levantar el velo tras el que se oculta el futuro; de echar una mirada a los próximos avances de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo durante los siglos futuros? ¿Cuáles serán los objetivos concretos por los que se esforzarán las mejores mentes matemáticas de las generaciones venideras? ¿Qué nuevos métodos y nuevos hechos descubrirán las nuevas centurias en el amplio y rico campo del pensamiento matemático?

KÖNIGSBERG, UNA CIUDAD Y UN PROBLEMA

Königsberg es el nombre de la que fue capital de Prusia Oriental desde la Baja Edad Media hasta el año 1945, cuando fue tomada por el ejército soviético. Desde entonces pertenece a Rusia y se llama Kaliningrado. Pero afortunadamente, el nombre de Königsberg no suele aparecer asociado a ocupaciones y guerras, sino que es uno de los nombres que más aparecen en libros de matemáticas y de historia de las matemáticas. Hay varias razones. Una de ellas es que en Königsberg vivieron matemáticos como Hilbert, Minkowski o Leonhard Euler (1707-1783). Y otra razón es que fue precisamente Euler quien resolvió por primera vez un problema asociado a los puentes sobre el río Pregel que había en la ciudad en su época. El río divide a la ciudad en cuatro regiones con una isla central. El problema consistía en encontrar un camino que recorriera todos y cada uno de los puente, sin pasar dos veces por el mismo. Se puede salir de cualquier región y acabar en la misma o en cualquier otra. Euler demostró que tal camino no existía. La antigua Universidad de Königsberg, donde enseñaron Hilbert y Minkowski se llama actualmente Universidad Immanuel Kant y destaca por sus estudios en matemáticas y astronomía.



Ciudad de Königsberg en tiempos de Euler.

En 1902, cuando Hilbert y Klein habían conseguido que el nombre de Gotinga fuese reconocido en cualquier lugar del mundo donde se hablase de matemáticas, desde Berlín, Schwarz ofreció a Hilbert ocupar una cátedra. Un honor que hasta la fecha nadie había rechazado, pero Hilbert sí lo hizo. Prefirió quedarse en Gotinga, aunque aprovechó, ayudado por Klein, para obtener algo a cambio de permanecer en su universidad. Ambos consiguieron del ministro alemán de Educación, Friedrich Althoff, que se creara una nueva cátedra de Matemáticas para el matemático ruso de origen lituano Hermann Minkowski (1864-1972), que había sido compañero y amigo de Hilbert en Königsberg.

MATEMÁTICA APLICADA, FÍSICA Y RELATIVIDAD

La situación en Gotinga mejoraba. Hilbert y Minkowski volvían a estar juntos, como ya antes ocurrió en Königsberg, pero esta vez al lado de Klein. El físico Max Born (1882-1970), premio Nobel en 1954 por sus trabajos en mecánica cuántica, había empezado a estudiar en Breslau (actualmente Wroklaw, Polonia) y luego se trasladó a Gotinga. En sus *Recuerdos y reflexiones de un físico* escribió:

> Me enteré de que Gotinga era la Meca de las matemáticas teutonas, y que allí vivían tres profetas: Felix Klein, David Hilbert y Hermann Minkowski. Por consiguiente, me decidí a peregrinar allí.

A partir de 1904 se unió a ellos el físico y matemático Carl Runge (1856-1927), para el que Klein consiguió que se creara una nueva cátedra de Matemática Aplicada. Klein, cuya formación era la de un matemático «puro», entendió que en el momento histórico en el que se encontraban, apostar por la asociación entre la matemática básica y la matemática aplicada sería muy beneficioso para ambas. En 1898, Klein había promovido la creación de la Asociación de Gotinga para el Desarrollo de la Matemática y la Física Aplicadas, en la que participaban más de cincuenta industriales, entre ellos Henry Botinger (1848-1920), director general de la empresa química farmacéutica Bayer. Se trataba de una asociación que se ocupaba de la creación y el mantenimiento de institutos de investigación que interaccionasen entre la ciencia y la industria.

La interacción entre la física y la matemática fue una constante en los años en los que Klein dirigió Gotinga. Hilbert y Minkowski coordinaban un seminario sobre la «Electrodinámica de los cuerpos en movimiento», en el que se trataban problemas que después acabarían englobados dentro de la relatividad. Esto ocurría precisamente durante el año 1905, el mismo año en el que apareció el famoso trabajo de Albert Einstein sale antes, sin fechas aunque por entonces su nombre no era conocido en Gotinga. Pero ese desconocimiento no duraría mucho tiempo.

Klein se interesó de inmediato por las teorías relativistas de Einstein debido a que, desde un primer momento, pensó que las nuevas teorías del físico encajaban perfectamente dentro de su nueva forma de entender la geometría plasmada en el programa de Erlangen. En efecto, Minkowski había introducido un grupo de transformaciones del espacio-tiempo que dependía de la velocidad de la luz, c, como parámetro. Analizó las propiedades e invariantes del grupo y demostró que, si se hacía tender hacia infinito el valor de c, obtenía un grupo que caracterizaba a la geometría newtoniana, en la que la velocidad de la luz es infinita. Esta aproximación puede considerarse dentro del programa de Erlangen, aunque Einstein no la tuviera en cuenta.

Klein escribió bastantes cartas a Einstein, entre ellas un comentario después de haber leído el artículo de 1917 en el que Einstein postuló la cosmología relativista, relacionando el artículo con sus investigaciones sobre geometría. En la respuesta que Einstein escribió a Klein, le decía:

> Es realmente sorprendente que puntos de partida tan diferentes como la matemática y la física den ocasión para establecer al final las mismas estructuras mentales... Como nunca he hecho geometría no euclídea, se me habían pasado las geometrías elípticas más obvias cuando estaba escribiendo el artículo.

En una carta posterior, en respuesta a otra de Klein, Einstein le comentaba:

> Me parece que usted sobreestima demasiado el valor de los enfoques puramente formales. Estos son ciertamente valiosos cuando se trata de formular definitivamente una verdad ya establecida, pero casi siempre fallan como una herramienta heurística.

Que Einstein insinuase a Klein que era un matemático demasiado formal no debió de gustarle mucho a Klein. Más adelante, este escribió a Einstein:

> No debe considerarme como un matemático muy inclinado exclusivamente al formalismo, sino más bien como un hombre que en el desarrollo de su vida se vio conducido por casualidad al lado de la matemática y que ahora está intentando demostrar el conocimiento que ha obtenido allí también respecto a su importancia para otras disciplinas cercanas.

No obstante, Klein también estuvo investigando en relatividad general y mantuvo durante mucho tiempo una correspondencia muy fluida con Einstein. El interés por la relatividad se contagió a todo Gotinga; de hecho, fue uno de los primeros lugares en los que el propio Einstein expuso sus teorías.

Paul Wolfskehl (1856-1906) fue un físico alemán que se convirtió en un rico industrial y que en su juventud había estudiado y disfrutado de las matemáticas. Su interés por esta ciencia se había mantenido, conservando un cierto contacto con el mundo académico, intentando estar al día de los últimos avances. Uno de los problemas que siempre apasionó a Wolfskehl era el último teorema de Fermat. De hecho, es muy posible que él mismo intentara encontrar alguna demostración. Después de su muerte, en su testamento dejó un fondo de 100.000 marcos para premiar a quien lograra demostrar el teorema. No obstante, mientras permaneciese sin demostrar, los beneficios del fondo fueron puestos a disposición de los matemáticos de la Universidad de Gotinga para que los emplearan de la forma que consideraran más adecuada para el progreso de la ciencia.

En Gotinga se formó la «comisión Wolfskehl», de la que formaron parte, entre otros, Klein, Hilbert, Minkowski y Runge, para destinar los beneficios del fondo a organizar conferencias y estancias científicas en Gotinga de profesores de otras universidades. No hay más que ver la lista de ponentes que pasaron por Gotinga y la temática de sus conferencias para entender que el interés de Klein iba mucho más allá que el de la matemática for-

LA LEYENDA WOLFSKEHL

A Paul Wolfskehl le apasionaba el último teorema de Fermat y había intentado demostrarlo durante bastante tiempo, sin conseguirlo. Es sabido que este hecho le produjo frustración, como la que provocó a numerosos estudiantes y aficionados, y no tan aficionados a las matemáticas, cada vez que intentaban encontrar la demostración del esquivo teorema. Además, Wolfskehl se había enamorado de una mujer, cuyo nombre no se conoce, que no le correspondía. Estas circunstancias le llevaron a tomar la decisión de suicidarse. Para ello pensó en un día y una hora concretos. Según parece, Wolfskehl era una persona muy ordenada. Llegado el día, estuvo redactando el testamento y cuando terminó, todavía faltaban unas horas hasta la hora exacta que había fijado. Así que decidió pasar el rato leyendo un trabajo de Ernst Kummer, precisamente sobre el último teorema de Fermat. Pero la lectura del artículo le absorbió tanto que se le pasó la hora del suicidio. Según parece, esto le hizo reconsiderar su determinación, olvidarse de la mujer y tomar la decisión de instaurar el premio de 100 000 marcos a quien demostrara el teorema por haberle salvado la vida. Aunque esta demostración tenía que producirse antes del día 13 de septiembre de 2007, también por alguna razón que desconocemos.

Esta historia se atribuye al matemático Alexander Ostrowski (1893-1986), que conoció a Wolfskehl, aunque no hay ninguna otra fuente con la que se haya podido contrastar la información.

mal. Algunos de ellos fueron Henri Poincaré que habló de «La nueva mecánica»; Hendrik A. Lorentz (1853-1928), uno de los precursores de la relatividad especial, que dio el curso «Viejos y nuevos problemas en física»; Arnold Sommerfeld (1868-1951), uno de los más estrechos colaboradores de Klein, que impartió un ciclo de conferencias titulado «Recientes avances en física», y el propio Albert Einstein, que estuvo en 1915. Después de la guerra, la crisis económica afectó a todas las esferas de la vida alemana y también la organización de las conferencias Wolksfehl; sin embargo, se siguieron celebrando y en 1922 llegó a participar el físico Niels Bohr (1885-1962), quien habló sobre la mecánica cuántica. En 1995, el matemático británico Andrew Wiles (n. 1953) expuso la demostración del último teorema de Fermat y ganó el premio Wolfskehl, si bien la inflación a lo largo de tantos años hizo que la dotación del galardón fuese una cantidad simbólica. Quizá sea este un curioso ejemplo de cómo la búsqueda de la solución de un problema científico puede producir beneficios colaterales en otras ramas de la ciencia.

TEORÍA MATEMÁTICA DE LA PEONZA

La peonza es uno de los juguetes más antiguos con los que se han entretenido niños de todos los tiempos. Su origen exacto no está claro, aunque se han encontrado peonzas o trompos de arcilla a orillas del río Éufrates. En las culturas griega y romana se fabricaban peonzas de madera y existen escritos de esa época que hablan del juego de la peonza como algo bastante habitual. Por ejemplo, el político y militar Catón el Viejo (234-149 a.C.) recomendaba a los padres que sus hijos jugasen con la peonza porque era un entretenimiento más seguro que los dardos. En el libro VII de la *Eneida* de Virgilio aparecen referencias:

> Como el trompo gira impulsado por la cuerda retorcida con que los niños en gran corro juegan por los patios vacíos y practican atentos su juego, él va trazando círculos al golpe de la cuerda…

También Platón menciona las peonzas en sus escritos, habla del «strobilos», que es un tipo de peonza que produce un silbido al rodar en torno a un aro. Platón utilizaba una peonza como metáfora sobre el movimiento. A pesar de ser un juego infantil, la explicación de su funcionamiento está muy lejos de ser fácil. Cuando la peonza gira, el denominado «efecto giroscópico» permite que se mantenga en equilibrio hasta que la gravedad termina por hacer que la inclinación con respecto del eje de giro vaya cambiando de lugar el centro de gravedad, describiendo círculos, hasta que acaba cayendo.

En el primer semestre del curso 1895-96, Felix Klein dio una ponencia titulada «La teoría de la peonza» dirigida fundamentalmente a profesores de Física y Matemáticas de *Gymmnasium*. Durante el segundo semestre del mismo curso, Klein fue invitado a dar unas conferencias en la Universidad de Princeton, Estados Unidos, con motivo del 150° aniversario de la creación de la universidad, y esta vez eligió como título «La teoría matemática de la peonza». Arnold Sommerfeld, asistente de Klein desde 1894, era el encargado de tomar notas en sus conferencias para después publicarlas. En un principio, Sommerfeld no puso mucho interés en la publicación de estas notas, debido fundamentalmente a la carga de trabajo que conllevaba ser el asistente de Klein, ocupándose de la corrección y publicación de numerosos trabajos. Sorprendentemente, «La teoría de la peonza» dio lugar a un gran proyecto, que duró trece años, y que se plasmó en la publicación de cuatro volúmenes dedicados a las matemáticas y la física de los cuerpos en rotación. Los dos primeros volúmenes tratan sobre la teoría y los dos últimos sobre las aplicaciones a la geofísica, la astronomía y la tecnología. Es un ejemplo más de la gran capacidad de trabajo de Klein y de su determinación a la hora de emprender y acabar grandes proyectos.

MUJERES MATEMÁTICAS EN GOTINGA

En una época en la que el acceso de la mujer a los estudios superiores y a la ciencia estaba prácticamente cerrado, Gotinga resultó

ser pionera, en particular de la mano de Klein. Como se ha comentado al comienzo del capítulo, Carl Friedrich Gauss tuvo entre sus estudiantes más importantes a la matemática francesa Sophie Germain, quien realizó importantes contribuciones a la teoría de números y a la teoría matemática de la elasticidad. La matemática rusa Sofia Kovalevskaya (1850-1891) es otro de los grandes nombres de mujeres matemáticas asociados a Gotinga. Kovalevskaya, que había emigrado a Alemania, estudió en la Universidad de Heidelberg y también en Berlín, con Karl Weierstrass, en privado, ya que la universidad no le permitía asistir a las clases regulares. Hizo importantes contribuciones al análisis matemático, a las ecuaciones en derivadas parciales y a la mecánica. Debido a la intercesión de Weierstrass le fue concedido, en 1874, el título de doctora en Matemáticas por la Universidad de Gotinga gracias a tres memorias que presentó: una sobre ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, otra sobre la forma de los anillos de Saturno y una tercera sobre integrales abelianas.

Ya en la época en la que Klein se encontraba en Gotinga, se matriculó en la universidad una estudiante británica, Grace Chisholm (1868-1944), graduada en Cambridge en 1892, año en el que viajó a Gotinga. Asistió a los cursos que daba Klein y en sus cartas a su familia habla de sus clases:

> ... en lugar de empezar con su habitual «¡caballeros!», saludaba a los alumnos con «¡oyentes!» (*Meine Zuhörer*) y con una peculiar sonrisa; en una o dos ocasiones se olvidó y dejó caer otra vez el «caballeros», pero se corrigió a sí mismo con otra sonrisa, una sonrisa de lo más franca y agradable, todo su rostro se iluminaba con ella.

En 1895, Chisholm se doctoró, bajo la supervisión de Klein, con una tesis en la que aplicó la teoría de los grupos de Klein a la trigonometría esférica. Fue el primer doctorado oficial de una mujer en Gotinga, ya que el de Sofia Kovalevskaya fue obtenido de forma no oficial porque en realidad no había asistido a clase ni se había sometido al examen oral. La relación de Klein con Chisholm no acabó ahí. En 1900, cuando Grace Chisholm se había casado con el también matemático William Young (1863-1942), Felix Klein

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA
La francesa Sophie German (1776-1831), alumna de Carl Friedrich Gauss, hizo importantes aportaciones a la teoría de números y a la teoría matemática de la elasticidad.

FOTO SUPERIOR DERECHA
Sofia Kovalevskaya (1850-1891), de origen ruso pero emigrada a Alemania, investigó en ámbitos como el análisis matemático y la mecánica.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA
Grace Chisholm (1868-1944), nacida en Reino Unido, fue la primera mujer en doctorarse de forma oficial en Gotinga.

FOTO INFERIOR DERECHA
La matemática alemana Emmy Noether (1882-1935) se distinguió como una de las más importantes algebristas del siglo XX.

sugirió a ambos que leyeran un artículo relacionado con la revolucionaria teoría sobre conjuntos infinitos de George Cantor (1845-1918). Esto llevó al matrimonio de matemáticos a trabajar y profundizar en la nueva teoría, lo que dio lugar a la publicación del libro *La teoría de conjuntos de puntos*, trabajo que recibió la felicitación personal del propio Cantor. La pareja Chisholm-Young llegó a publicar más de doscientos artículos y libros de diferentes temas matemáticos, muchos de ellos inspirados por Felix Klein.

Otro de los nombres de matemáticas más importantes asociado a Gotinga es el de Emmy Noether (1882-1935) que llegó a ser una de las mayores algebristas del siglo XX. Noether nació en Erlangen, donde su padre, Max Noether (1844-1921), era profesor de Matemáticas. A los dieciocho años comenzó a asistir a clases de matemáticas en la Universidad de Erlangen, aunque no como estudiante normal, sino como oyente. La comisión académica de la universidad había dictaminado que admitir estudiantes femeninas «desbarataría el orden académico». Al cabo de dos años, se trasladó a Gotinga, donde asistió a las clases de Hilbert, Minkowski y Klein. En 1904 volvió a Erlangen, donde, a pesar de no haber sido nunca estudiante oficial, superó el examen de acceso para matricularse en el programa de doctorado. En 1908, se doctoró bajo la supervisión de Paul Albert Gordan (1837-1912), un colaborador de Klein cuando este estuvo en Erlangen.

En 1915 Hilbert y Klein invitaron a Noether de nuevo a Gotinga. En esa época, la matemática era una algebrista y su especialidad no era la física matemática; sin embargo, el primer resultado de Noether en Gotinga fue fundamental para la física teórica, actualmente conocido como «teorema de Noether». El teorema establece una correspondencia entre simetrías y leyes de conservación y llevó a nuevas formulaciones de algunos conceptos en la teoría de la relatividad general. Hilbert y Klein convencieron a Noether para que se quedara en Gotinga y, para que pudiera dar clase sin que ningún miembro de una comisión pusiera pegas, Hilbert anunció con su propio nombre el curso que impartiría Noether: «Seminario de física matemática: Prof. Hilbert, con la colaboración de la Dra. E. Noether». Hilbert y Klein intentaron por todos los medios que Noether fuera contratada de forma oficial en la universidad, pero el claustro no la aceptó. En plena Primera Guerra Mundial, los que se oponían llegaron a afirmar: «¿Qué van a pensar los soldados del país cuando, al regresar a casa, vean que se espera de ellos que aprendan a los pies de una mujer?». Hilbert llegó a responder: «No veo que el sexo de la candidata sea un argumento en contra de su admisión como *Privatdozent*. Al fin y al cabo, la universidad no es una casa de baños». De todas formas, en 1918, cuando Alemania aceptó las condiciones del armisticio, las mujeres obtuvieron el derecho al voto y un año más tarde, con treinta y siete años, Emmy Noether se convertía en *Privatdozent*. Tres años después fue ascendida a «profesora asociada no oficial», a pesar de que tenía desde hacía años méritos más que suficientes para ocupar una cátedra. Aun así, fue la primera mujer que llegó a dirigir tesis doctorales en Gotinga.

KLEIN COMO LÍDER

El paso por Gotinga de Felix Klein cambió por completo el aspecto de la universidad, que recuperó su esplendor y se convirtió en un centro de referencia. El estilo particular de funcionamiento de Gotinga, atrayendo a jóvenes investigadores y estudiantes brillantes, la organización regular de conferencias, la publicación de resultados en una revista científica del más alto nivel como los *Mathematischen Annalen*, fue tomado como modelo por alguna de las universidades norteamericanas que en esa época estaban comenzando su andadura. Todo esto no hubiera sido posible sin un liderazgo como el de Felix Klein.

Uno de los estudiantes que pasó por Gotinga y que conoció a Klein, el físico húngaro-estadounidense Theodore von Kármán (1881-1963), escribía años después sobre Klein:

> Era un individuo alto, atractivo y sólido, con un aire imperial. Para muchos de sus jóvenes ayudantes era una especie de semidiós, y le admiraban profundamente. Cuando ordenaba a algún ayudante hacer

algo, ninguno se atrevía siquiera a pensar en negarse. Con una simple mirada desaprobadora, Klein podía meter el miedo en el corazón de cualquiera que le desagradase. Tenía en sus manos la vida o la muerte de las carreras de los jóvenes profesores de Gotinga, y él lo sabía. Klein estaba extremadamente bien organizado, y esto contribuía a su reputación. Todos los momentos del día estaban establecidos con antelación, y no podía soportar perder el tiempo…
A pesar de su disciplinado comportamiento, era agradable trabajar con Klein. Podía ser encantador y altamente sugerente. Alguien dijo una vez que cuando iba a ver a Klein con un problema científico complejo, no siempre estaba seguro de que Klein lo comprendiese, pero que después de hablar un rato con él, el visitante salía con tantos conocimientos e ideas que estaba definitivamente seguro de que él mismo ahora sí que lo comprendía. Klein también era un buen conferenciante y profesor y sus clases eran modelos de arquitectura verbal.

El poder del que habla Kármán no debía de ser exclusivo de Klein, sino bastante habitual en la Alemania de la época, incluso se podría decir que en prácticamente todas las universidades en todos los tiempos llegan a darse esas circunstancias, más o menos merecidas por quienes ostentan ese poder. El caso de Klein quizá era más acusado precisamente debido a su fuerte personalidad. El físico Max Born (1882-1970) contaba en sus memorias que, en cierta ocasión, en 1905, no siguió la recomendación de Klein de preparar un trabajo para presentarse a un premio que convocaba la universidad. La invitación de Klein era una gran distinción, pero Born optó por no presentarse y eso enfureció a Klein. Born escribió que no le resultó fácil calmar a Klein y así poder finalizar su doctorado.

En cuanto a la forma del pensamiento matemático de Klein, su alumna Grace Chisholm escribió:

> Su mente siempre estaba repleta de ideas y reflexiones brillantes, aunque puede que su obra careciese a veces de algunos aspectos requeridos por la exactitud matemática. Pero esta impresión cambiaba a través del contacto personal, al menos en lo que respecta a sus estudiantes. Su máxima favorita fue: «Nunca seas aburrido».

LA DECADENCIA DE GOTINGA

Felix Klein se retiró en 1913, después de una larga enfermedad que le tuvo ingresado durante algunos períodos de tiempo en un sanatorio, aunque continuó trabajando junto con Hilbert en algunos aspectos de la relatividad general. Falleció el 22 de junio de 1925. Después de Klein, Gotinga continuó produciendo ciencia de calidad durante algunos años, fruto en gran parte del ambiente que llegó a crear. El avance de la mecánica cuántica y sus fundamentos matemáticos se desarrollaron en gran parte en las pizarras de Gotinga. Nombres como Max Born, Werner Heisenberg (1901-1976), Pascual Jordan (1902-1980), Eugene Wigner (1902-1995) o John von Neumann (1903-1957) pasaron por Gotinga.

Pero este ambiente científico no se mantuvo en el tiempo. En 1933 el gobierno nazi expulsó a todos los profesores y estudiantes judíos o sospechosos de serlo. Se les acusaba de dedicarse a lo que los nazis consideraban la «física judía». Se referían a la relatividad y a la mecánica cuántica, iniciadas por Albert Einstein y Niels Bohr, y que se oponía a la «física aria», representada por Philipp Lenard (1862-1947), que llegaría a ser asesor de Hitler. Los nazis arrasaron en muy poco tiempo con todo lo que Gauss, Dirichlet, Riemann, Hilbert y Klein lograron construir durante tantos años y con tanto esfuerzo. Desde entonces, Gotinga nunca ha llegado a ser lo que fue durante la vida de Felix Klein. Se cuenta que Hilbert, ya retirado, asistió a un banquete que ofrecieron las nuevas autoridades alemanas en 1934 y fue sentado al lado del nuevo ministro de Educación. El ministro le preguntó; «¿Cómo va la matemática en Gotinga ahora que ha sido liberada de la influencia judía?». Hilbert contestó: «¿La matemática en Gotinga? Ya no queda nada de eso».

CAPÍTULO 5

Klein y la enseñanza de las matemáticas

No es habitual que grandes científicos se preocupen por la divulgación y la enseñanza de las matemáticas. A partir de 1900, Felix Klein comenzó a interesarse por la instrucción de las matemáticas elementales. Su implicación en diversos proyectos de reforma de la educación acabó teniendo un reflejo en la actividad docente de profesores de todo el mundo. Sus ideas sobre la forma de explicar las matemáticas siguen vigentes en la actualidad.

En 2008, la Unión Matemática Internacional, más conocida por sus siglas en inglés, IMU, y la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática, abreviada por sus siglas en inglés, ICMI, pusieron en marcha el «Proyecto Klein». La idea del proyecto consistía en retomar el intento de Felix Klein, quien, un siglo antes, había escrito el libro *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. La IMU y la ICMI pretendían editar un libro destinado a profesores de matemáticas de los cursos inmediatamente anteriores a la entrada en la universidad: el bachillerato o los últimos cursos de la enseñanza secundaria, dependiendo del sistema educativo de cada país. Se intentaba, con la colaboración de matemáticos de diferentes nacionalidades, crear una obra en la que se hablase de aritmética, lógica, álgebra, geometría, análisis, matemática discreta y computacional, probabilidad y estadística. Para ello se creó una comisión con expertos de varios países, se habilitaron páginas web y se realizaron diversas conferencias internacionales, las «Conferencias Klein». La comunidad matemática internacional consideraba que merecía la pena intentar continuar con el gran proyecto que Klein había comenzado hacía tantos años para conectar el mundo de la investigación matemática con el de la enseñanza preuniversitaria. En la justificación del proyecto se planteaba: «¿Cuáles son los desarrollos matemáticos del siglo XXI que los profesores de secundaria deberían conocer y cómo se les

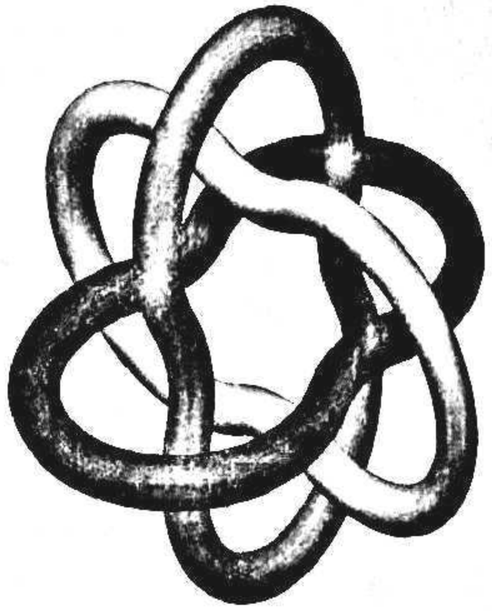
pueden hacer accesibles?». Pero después de organizar algunas conferencias y publicar artículos escritos por matemáticos de primer nivel en una página web, el proyecto no siguió adelante. Así pues, la comisión de expertos de la comunidad matemática internacional no fue capaz de crear un libro de matemáticas que pudiera servir como inspiración a los profesores de matemáticas para preparar a los futuros estudiantes universitarios de ciencias.

MATEMÁTICA ELEMENTAL DESDE UN PUNTO DE VISTA SUPERIOR

En ciencia resulta difícil llevar a cabo proyectos cuando no hay un liderazgo claro que tenga una idea de cuáles son los objetivos que se persiguen. Felix Klein, con fuertes convicciones científicas, fue capaz de situar Gotinga en la primera línea de la investigación y la formación de la matemática mundial y también logró implementar un proyecto de la envergadura y la importancia que hoy en día sigue teniendo la conexión entre el mundo de la investigación científica y el mundo de la educación preuniversitaria. Klein estaba convencido de que la mejor manera de transformar la enseñanza de las matemáticas no era solo reformar las leyes, sino mejorar sustancialmente la formación de los profesores. En junio de 1908 publicó un texto titulado *Elementarmathematik von einem höheren Standpunkte aus* (*Matemática elemental desde un punto de vista superior*), dedicado a la aritmética, el álgebra y el análisis. Poco después, en las Navidades del mismo año, editó el segundo volumen con el mismo título, pero dedicado a la geometría. Un tercer y último volumen completó la colección, esta vez el título era *Matemáticas de la precisión y de la aproximación*. El tercer volumen se publicó en versión litografiada en 1902, pero la edición definitiva no llegó hasta 1928, cuando Klein ya había fallecido. El texto tuvo una gran influencia desde un principio, no solamente en Alemania, sino en toda Europa, debido a que a los pocos años los dos primeros volúmenes fueron traducidos al inglés, italiano, francés y español; una influencia que ha llegado casi intacta hasta

LA UNIÓN MATEMÁTICA INTERNACIONAL Y LA COMISIÓN INTERNACIONAL PARA LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

La Unión Matemática Internacional (IMU) es una organización no gubernamental dedicada a fomentar la cooperación internacional en el campo de las matemáticas. Actualmente, participan en ella más de 80 países. Entre las actividades de la IMU está la de organizar, cada cuatro años, los Congresos Internacionales de Matemáticos (ICM), que son las reuniones internacionales más importantes de intercambio de ideas entre matemáticos de todo el mundo. Además, la IMU es la responsable de otorgar los premios más importantes en el mundo de las matemáticas, entre ellos la medalla Fields, que es hoy en día, junto con el Premio Abel, una de las mayores distinciones por las contribuciones en cualquier campo de las matemáticas. Las medallas Fields se entregan cada cuatro años a entre dos y cuatro matemáticos con edades no superiores a los cuarenta años. La IMU se fundó en 1920, aunque fue disuelta en 1932 y vuelta a constituir en 1950, después de la Segunda Guerra Mundial.



Logotipo de la IMU desde 2006, diseñado por John M. Sullivan.

Una institución para mejorar la enseñanza de las matemáticas

La Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI) fue fundada en 1908 en el Congreso Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en Roma con la misión de mejorar la enseñanza de las matemáticas en todo el mundo mediante proyectos, reuniones internacionales, directrices y publicaciones. El primer presidente del ICMI fue Felix Klein y, como tal, emprendió iniciativas para la reforma de la enseñanza de las matemáticas que cambiaron sustancialmente la forma y los contenidos de las matemáticas, iniciativas que supusieron una importante modernización de programas y pedagogía. La ICMI cesó en sus actividades durante las dos guerras mundiales y reanudó las mismas en 1952. Actualmente depende de la IMU y se encarga de organizar los Congresos Internacionales de Educación Matemática.

nuestros días, ya que se sigue reeditando en diferentes idiomas. El tercer volumen, sin embargo, no es tan conocido como los dos primeros, de hecho, la primera traducción al inglés no se produjo hasta el año 2016.

Los dos primeros volúmenes de *Matemática elemental desde un punto de vista superior* están basados en unos cursos que Klein dio en 1895 a profesores de matemáticas de los *Gymnasium* alemanes y el tercero en un curso que también impartió a docentes de matemáticas, pero esta vez durante el verano de 1901. En la introducción que el propio Klein escribió para el primer volumen de 1908, se puede encontrar un esbozo de cómo entendía la conexión entre la enseñanza secundaria y la universitaria:

> En los últimos años ha crecido el interés de los profesores de matemáticas y ciencias naturales de las universidades en relación con la formación apropiada de los aspirantes a ocupar puestos académicos más elevados. Este es un fenómeno bien reciente. Durante un largo período de antes de su aparición, los académicos se han preocupado únicamente por su rama del saber, sin importarles nada las necesidades de las escuelas e incluso sin interesarse por establecer un nexo de unión con las matemáticas escolares. ¿Cuál ha sido la consecuencia de esta forma de proceder? El joven estudiante universitario se va confrontando, al comenzar sus estudios, con problemas que no guardan relación con las cosas que eran importantes en la escuela. Y, en consecuencia, se olvida pronto y por completo de todas ellas. Pero después de terminar sus estudios pasa a ser profesor y entonces se ve obligado de pronto a enseñar las tradicionales matemáticas elementales de la antigua forma pedante; y como sin ayuda no es capaz de encontrar un nexo que ponga en relación esa tarea con las matemáticas universitarias, pronto cae en una forma de enseñar avalada por el tiempo, y sus estudios universitarios pasan a ser un recuerdo más o menos agradable pero que no ejerce influencia en su enseñanza.

Cuesta creer que estas palabras fueran escritas hace más de un siglo, ya que parecen describir una problemática de la conexión entre la enseñanza de las matemáticas en diferentes niveles que resulta bastante actual y que sigue sin ser resuelta.

He aquí un ejemplo que quizá pueda ayudar a entender cuál era la crítica de Klein al estado en que se encontraba la enseñanza de la matemática en la época. Se trata de un fragmento donde se explica el enfoque que habría que dar a la enseñanza de uno de los pilares básicos de las matemáticas, los números:

> Por ejemplo, si al niño se le explican los números axiomáticamente, como entes abstractos, sin contenido, con los cuales se puede operar según ciertas reglas, le será imposible entender. Por el contrario, el niño asocia los números con imágenes concretas. Hay números de nueces, de manzanas, y de otras cosas buenas, y al principio solo pueden y deben presentársele bajo esta forma tangible. [...] Las matemáticas deben estar asociadas a todo aquello que interese seriamente al alumno en cada momento concreto de su desarrollo.

Sin embargo, a pesar de estas lecciones de Klein, desde entonces hasta la actualidad, una y otra vez, en diferentes sistemas educativos y en diferentes épocas, se ha vuelto a cometer el error de enseñar matemáticas con un enfoque abstracto a niños y jóvenes, antes incluso de utilizar ideas intuitivas. Por ejemplo, durante la década de los setenta, en varios países europeos se introdujo en la enseñanza elemental la llamada «matemática moderna», la teoría de conjuntos. Los niños de seis años aprendían sobre elementos, conjuntos, uniones e intersecciones, cuando deberían haberse dedicado a aprender a contar, a utilizar los números, a identificar figuras geométricas y a relacionarlas con el mundo que les rodeaba. Un punto de vista que hubiera sido considerado una aberración por alguien como Klein en la Gotinga en la que, por poner un ejemplo, su predecesor, el gran Gauss, quizás uno de los matemáticos con un mayor número de aportaciones a la ciencia, no conocía esos conceptos porque se inventaron mucho después.

Klein, hablando sobre este tema, después de recomendar la lectura del primer libro en el que se recoge de manera sistemática la teoría de conjuntos, *La teoría de conjuntos de puntos*, de su alumna Grace Chisholm y su marido, el también matemático William H. Young, escribía:

¿Qué parte de lo anterior puede enseñarse en los colegios? Desde el punto de vista de la pedagogía matemática debemos, por supuesto, protestar ante la posibilidad de presentar cosas tan difíciles y abstractas a los alumnos demasiado pronto. Para precisar bien mi opinión en este punto he de recordar la ley fundamental biogenética, según la cual el individuo en su desarrollo recorre en rápida sucesión todos los estados en el desarrollo de las especies... Pienso que, en la enseñanza de las matemáticas, al igual que en cualquier otra disciplina, se debe seguir esta ley, al menos en su forma general. Teniendo en cuenta la habilidad natural de la juventud, la enseñanza debe guiarles lentamente hasta llegar a los temas más difíciles y, finalmente, a las formulaciones más abstractas; y haciendo esto se seguirá el mismo camino por el que la raza humana ha ascendido desde su estado primitivo original a formas superiores del conocimiento.

Los capítulos del libro *Matemática elemental desde un punto de vista superior* están escritos a partir de las clases que impartía Klein. Para ello, el matemático solía encargar su transcripción a alguno de sus numerosos alumnos universitarios y colaboradores y, a pesar de las correcciones y las lógicas adaptaciones de estilo, su lectura respira la frescura de una clase en directo. Son una especie de grabación de esos momentos en los que Klein ejercía como el excelente profesor que fue durante toda su vida.

PROFESOR KLEIN

Existen muchos testimonios que indican que Klein cuidó siempre de manera muy especial sus clases, adaptándose a los estudiantes que tenía frente a él, que podían ser desde aspirantes a ingenieros, físicos, matemáticos o profesores de matemáticas de los *Gymnasium* alemanes. Uno de los alumnos más destacados que tuvo Gotinga fue el físico Max Born (1882-1970), premio Nobel de Física en 1954. Born tuvo como profesores, entre otros, a David Hilbert, Hermann Minkowski y al propio Felix Klein, quienes eran,

KLEIN EXPLICANDO (A-B)(C-D)

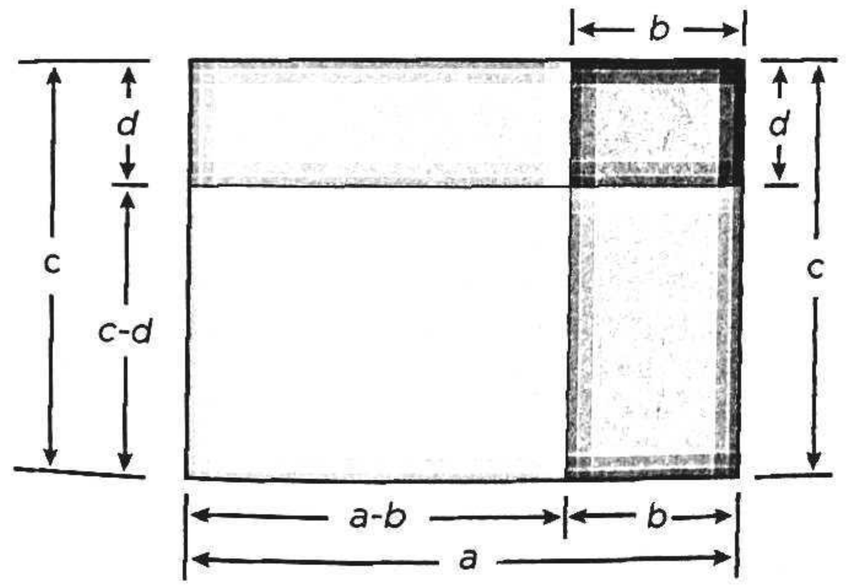
El producto de las dos diferencias *(a-b)(c-d)* se puede obtener multiplicando cada uno de los dos números que participan en la primera de las diferencias por la segunda diferencia, después se eliminan los paréntesis aplicando la llamada «propiedad distributiva», y se consigue el resultado. Es decir,

$$(a-b)(c-d) = a(c-d) - b(c-d)$$
$$= ac - ad - bc + bd.$$

Sin embargo, hay otra forma de llegar a la misma conclusión, geométrica y mucho más intuitiva. Se trata de plantear la operación como una operación de sumas y restas de áreas de rectángulos. Felix Klein propuso la siguiente figura, en la que se ve de una manera mucho más directa cómo se puede obtener el mismo resultado, que, al final, no es más que sumar y restar áreas de rectángulos.

Una solución antigua

La utilización de representaciones geométricas mediante la adición y sustracción de rectángulos y partes de rectángulos ya había sido utilizada por matemáticos antiguos, como el persa al-Juarismi en su tratado de álgebra escrito entre los años 813 y 833.



Representación geométrica de $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$.

según Born, los «sumos sacerdotes» de la matemática. Sobre Klein, Born opinaba: «Era el profesor más brillante; de hecho, demasiado brillante para mí. Uno tenía que ser realmente un matemático puro para disfrutar con sus clases, incluso cuando trataba de aplicaciones a la física y a la tecnología, algo que le gustaba hacer».

La historiadora y biógrafa de científicos norteamericanos Constance Reid (1918-2010), en su biografía sobre Hilbert, escribió:

> Las clases y las conferencias de Klein eran consideradas como clásicas. Acostumbraba a llegar una hora antes que los estudiantes con el fin de verificar la enciclopédica lista de referencias que había preparado su ayudante. Antes de comenzar la lección había trazado en su mente toda la secuencia de fórmulas, diagramas y citas en el adecuado orden. Al finalizar, la pizarra contenía un resumen perfecto de la presentación, cada centímetro cuadrado contenía información en el orden lógico. La idea de Klein era que los estudiantes debían trabajar ellos mismos las demostraciones a partir de algunas indicaciones generales que él les daba sobre el método a seguir. El resultado era que un estudiante tenía que dedicar al menos cuatro horas de trabajo fuera de clase por cada hora lectiva si quería dominar el material.

LOS «PROTOCOLOS» DE KLEIN

Las anotaciones de Reid y otros autores prueban que Felix Klein era un trabajador incansable, ordenado y sistemático, algo que él mismo se empeñó durante años en dejar documentado. La Universidad de Gotinga, en la sala de entrada de la biblioteca del Mathematisches Institut, tiene una colección única de manuscritos y libros matemáticos. Se trata de dos estanterías completas que contienen el archivo histórico que documenta el desarrollo de uno de los centros de investigación matemática más importantes del mundo. Contiene conferencias manuscritas de Dirichlet, Riemann, Clebsch, Hilbert, Minkowski, Noether o de Max Born. Posiblemente no exista en el mundo ningún otro archivo en el que, en un único lugar, figure tal cantidad de documentos de tantos matemáticos. Sin embargo, la más impresionante de las colecciones que existen en Gotinga es la del *Seminar-Protokolle* de Felix Klein. Se trata de un detallado registro escrito a mano, a lo largo de más de 8000 páginas en 29 volúmenes de cuarenta años de seminarios, conferencias y clases impartidas por el propio Klein, sus colegas, sus alumnos y los visitantes a los que invitó.

MAX BORN EN GOTINGA

El premio Nobel Max Born (1882-1970).

Max Born (1882-1970) es el ejemplo típico de estudiante que Klein se empeñó en formar durante sus años al frente de la ciencia en Gotinga. Un científico con una formación integral en matemáticas y física. Su tesis doctoral, dirigida por el matemático Carl Runge, tenía por título *Estudio sobre la estabilidad de la línea elástica en el plano y el espacio, bajo diferentes condiciones de contorno* y fue leída en 1906. Durante esta época estuvo trabajando, junto con Minkowski, en relatividad especial. En 1921, Born obtuvo una cátedra en Gotinga. En parte gracias a él, Gotinga se convirtió en uno de los más famosos centros de investigación de física del mundo. En enero del 1933, el Partido Nazi llegó al poder en Alemania, y Born, que tenía raíces judías, como tantos científicos en Alemania y, en particular, en Gotinga, fue despedido. Huyó a Inglaterra, trabajando, en primer lugar, en Cambridge, y después, en la Universidad de Edimburgo, donde permaneció hasta 1952. En 1954 obtuvo el Premio Nobel de Física por sus trabajos sobre física atómica y mecánica ondulatoria, en particular por su interpretación estadística y probabilística de la función de onda de la ecuación de Schrödinger, una formulación matemática que sirve como modelo para estudiar sistemas de la mecánica cuántica. En 1952, se retiró a Alemania y falleció en Gotinga, en 1970. Fue enterrado en el mismo cementerio en el que reposan los restos de su maestro Hilbert y su gran amigo, el también físico Max Planck (1858-1947).

Estos *Protocolos*, que nunca antes habían sido publicados, pero que ahora se pueden consultar en su versión digital, gracias a un proyecto del Clay Mathematics Institute, la institución responsable también del concurso internacional de «Los problemas del milenio», constituyen uno de los registros más importantes de la actividad matemática de la era moderna. Los *Protocolos* comienzan con los seminarios y conferencias del semestre correspondiente al verano de 1872, hasta el retiro de Klein, en 1913. Las presentaciones están escritas a mano, habitualmente por el conferenciante o el profesor que las impartía, a veces también por un estudiante y muchas veces por el propio Klein. Los volúmenes se iban guardando en la biblioteca de cada universidad por la que pasó Klein, para que sirviesen de referencia a los estudiantes.

Durante los cuarenta años que cubren los *Protocolos*, no solo se cubren todas las ramas de las matemáticas, sino que también aparecen seminarios, conferencias y clases de mecánica, astronomía, geodesia, hidrodinámica, electricidad, teoría de la elasticidad y en los últimos años justo antes del retiro de Klein, sobre psicología y enseñanza de las matemáticas.

El último volumen de los *Protocolos* contiene cuatro seminarios, tres de ellos dedicados a la psicología y la educación matemática. En esa época Klein era presidente de la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática y en estos seminarios se reflejaba su trabajo. En el seminario que tuvo lugar durante el semestre invernal del curso 1909-1910 se habló de matemáticas y psicología y en el volumen figura el título «Fundamentos psicológicos de las matemáticas». La charla inaugural del seminario, a cargo del propio Klein, versó sobre temas tales como el desarrollo de la intuición matemática básica, las formas de pensamiento de los matemáticos, las implicaciones para la instrucción matemática o la posición de las matemáticas en las ciencias. Todo ello muestra hasta qué punto Klein estaba preocupado por encontrar formas de enseñar matemáticas más productivas, analizando la manera en que trabajan las mentes de los matemáticos.

El último de los seminarios que aparece en los *Protocolos*, organizado por Klein, aunque finalmente dirigido por uno de sus antiguos alumnos, Rudolf Schimmack (1881-1912), tuvo lugar durante el verano de 1912. En él se estudiaron los diferentes sistemas educativos de los principales países europeos en cuanto a las matemáticas se refiere. Alemania, y algunos países más, estaban inmersos en reformas de sus sistemas educativos, que afectaron de manera importante a la enseñanza de las matemáticas y en las que las ideas de Klein tuvieron una enorme influencia.

LA PSICOLOGÍA DE LA CREACIÓN MATEMÁTICA

En su intento de mejorar la enseñanza de las matemáticas, Felix Klein se preocupó por investigar y reflexionar sobre la psicología de la creación matemática. Evidentemente, Klein no ha sido el único científico que se ha preocupado por el estudio de la forma en la que los matemáticos «hacen matemáticas».

Henri Poincaré, un año antes de que Klein organizase su seminario sobre la psicología de las matemáticas, pronunció una conferencia en la Sociedad Psicológica de París que llevaba por título «La creación matemática». Poincaré, al igual que Klein, tenía un enorme interés por comprender la forma en la que se produce y se divulga el trabajo matemático, como puede verse en algunas de las publicaciones que realizó. Poincaré comenzó su alocución afirmando que la creación matemática debería ser de interés para los psicólogos porque se trata de aquella actividad humana en la que la mente «parece recurrir menos al exterior, actuando o pareciendo actuar, por sí y para sí», por lo que su estudio podría ayudar a comprender mejor el pensamiento humano. Poincaré se formulaba las mismas preguntas que muchos matemáticos se han planteado, incluido Klein, ¿por qué hay quien no puede seguir un desarrollo matemático si, al fin y al cabo, incluso en los casos más complicados, no se trata más que de un encadenamiento de pequeños razonamientos? Pequeños razonamientos que, en otras condiciones y por separado, todos podrían seguir sin ninguna dificultad. Pero, afirmaba Poincaré, «quienes no pueden seguir tal razonamiento más que con dificultad son mayoría, como atestigua la experiencia de los profesores de enseñanza secundaria». A continuación, Poincaré realizó un ejerci-

cio de introspección, mostrando un ejemplo de cómo él mismo llegó a la solución de cierto problema matemático.

Inspirado en la conferencia de Poincaré, el también matemático francés Jacques Hadamard (1865-1963) escribió un ensayo titulado *Psicología de la invención en el campo matemático*, en el que incluyó, como lo hiciera antes Poincaré, sus propias experiencias personales en la creación matemática.

Henri Poincaré y Jacques Hadamard analizaron un fenómeno que observaron en sí mismos y que también ha sido experimentado por otros muchos matemáticos, aunque quizás ellos fueron de los primeros en dejar constancia de tal hecho. Describieron cómo se enfrentaban a un problema y tras un primer intento de encontrar la solución, que se podría denominar como el «período de preparación», sin conseguir resolverlo, decidían abandonarlo. Entonces, al cabo de un tiempo, días, semanas o incluso meses,— «el período de incubación»—, en un cierto momento se les ocurría cómo se podía afrontar la solución. Hadamard llamaba, como no podía ser de otra forma, a ese momento «iluminación». Ese momento de iluminación resultaba muy claro, aunque después había que pasar a la fase de «verificación».

A todos los matemáticos que han realizado reflexiones similares les resulta difícil precisar cómo se produce ese momento de iluminación, ese «¡eureka!». Por ejemplo, cuando se preguntaba al matemático indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920) cómo llegaba a concebir sus imaginativos teoremas, a menudo afirmaba que eran inspirados directamente por la diosa Namagiri, durante sus sueños. Hadamard, y también Poincaré y el propio Klein, pensaban que a las mejores ideas matemáticas se llegaba por motivos estéticos, por una búsqueda de la belleza. El propio Albert Einstein afirmaba algo parecido a propósito de su trabajo en el campo de la física matemática.

Recientemente, el matemático Cédric Villani (n. 1973), ganador en 2010 de una medalla Fields, en un libro titulado *El nacimiento de un teorema*, escrito en forma de diario, relató cómo logró encontrar la demostración de un importante teorema después de intentarlo durante más de dos años. Villani relata en su libro cómo, durante ese tiempo, tuvo momentos de esperanza y

de desesperación, se separó del problema y volvió a él y, al final, acabó resolviéndolo.

Felix Klein, también en este campo, fue uno de los precursores del difícil intento de comprender el funcionamiento del pensamiento matemático, un problema al que se dedican en la actualidad científicos de las más diversas áreas.

EL PUNTO DE VISTA HISTÓRICO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Una característica de la forma de entender la enseñanza de las matemáticas por parte de Felix Klein en sus conferencias y en sus publicaciones pedagógicas es la del importante papel que otorgaba a la historia de las matemáticas. Klein explica varias veces en *Matemática elemental desde un punto de vista superior* su convicción de que el conocimiento de los desarrollos históricos de las ideas y conceptos de matemáticas contribuye a una comprensión más profunda de los fundamentos de las matemáticas. Klein fue probablemente uno de los primeros matemáticos en apoyar la idea del uso de la historia en la enseñanza, mucho antes de que se creara, en 1976, el Grupo Internacional de Estudio sobre las Relaciones entre la Historia y la Pedagogía de las Matemáticas (conocido por sus siglas, HPM, y asociado a la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática). Lo cierto es que hoy en día el uso de la historia de la matemática como herramienta pedagógica es un punto de vista universalmente aceptado, aunque también es cierto que, en la práctica diaria, son muy pocos los docentes que lo utilizan. Los motivos van desde la falta de tiempo para cumplir las directrices de los programas educativos oficiales hasta la falta de formación por parte de los profesores.

Felix Klein no solo estaba interesado en la historia de las matemáticas, sino que promovió de manera decidida la investigación en este campo. Por ejemplo, fue el promotor de que se comenzase a investigar sobre los manuscritos matemáticos de Gauss y también fue el responsable de la publicación de las obras completas

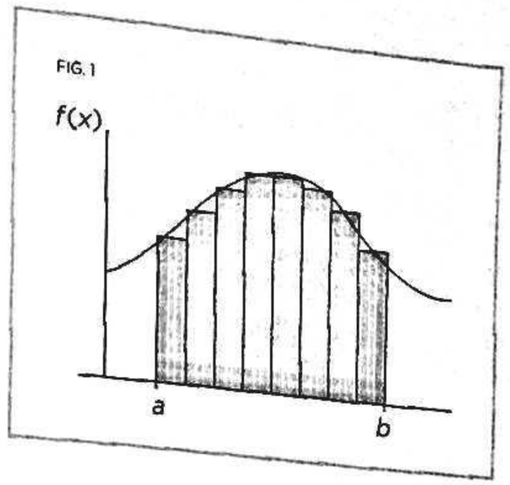
de varios matemáticos. Sin duda, este conocimiento e interés está en la base de las anotaciones históricas de los tres volúmenes dirigidos a los profesores de secundaria.

En el último capítulo del primer volumen de *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, titulado «Sobre el cálculo infinitesimal propiamente dicho», Felix Klein justifica el porqué de la importancia del punto de vista histórico:

> Se oye decir a los no matemáticos, en particular a los filósofos, que las matemáticas consisten exclusivamente en deducir consecuencias de premisas claramente establecidas, y que para este proceso no importa lo que dichas premisas puedan significar, ya sean verdaderas o falsas, con tal de que no sean contradictorias entre sí. Pero una persona que haya realizado trabajos matemáticos productivos tiene que hablar de otro modo. En efecto, los primeros tienen en mente únicamente la forma cristalizada en la que todas las teorías matemáticas acaban siendo moldeadas. Pero el propio investigador en matemáticas, como en cualquier otra ciencia, no trabaja de esta forma rigurosamente deductiva, sino que emplea su fantasía y procede por inducción ayudándose de recursos puramente heurísticos. Se pueden dar numerosos ejemplos de matemáticos que han descubierto teoremas de la mayor importancia que eran incapaces de demostrar.

A continuación, comienza a hacer un recorrido histórico sobre el concepto de integral:

> La definición lógica y abstracta determina a la integral $\int_a^b f(x)dx$, es decir, el área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las ordenadas $x = a$, $x = b$, como el límite de la suma de rectángulos muy estrechos inscritos en esta área cuando su número crece infinitamente y su anchura decrece sin limitación. Sin embargo, la percepción sensible considera natural definir a esta área no como el límite exacto sino sencillamente como la suma de un gran número de rectángulos muy estrechos. De hecho, la ineludible inexactitud del dibujo pondrá inevitablemente un límite a la reducción del tamaño de los rectángulos. Finalmente, Klein comenta cómo es precisamente esta forma ingenua de razonar la característica de los grandes investigadores que desarrollaron la idea del cálculo integral, científicos tales como Arquímedes, Kepler o Bonaventura Cavalieri (1598-1647), antes de llegar a la idea moderna de la «integral de Riemann».



Integral como suma de rectángulos.

PROBLEMAS FAMOSOS DE GEOMETRÍA ELEMENTAL

La colaboración de Felix Klein con los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria fue una constante durante los años que estuvo en Gotinga. Klein afirmaba que eso se debía al mal recuerdo de la formación científica que recibió cuando estudió en el *Gymnasium* y estaba convencido de que esta cooperación era la mejor manera de contribuir a la mejora de la pedagogía matemática en Alemania y, gracias a su implicación en las instituciones matemáticas internacionales, en todo el mundo. Un ejemplo de esta implicación ha llegado hasta nosotros en forma de libro, publicado en 1895, *Problemas famosos de geometría elemental*. Esta obra, de unas ochenta páginas, está escrita a partir de las notas que uno de los asistentes tomó de unas conferencias de Klein en Gotinga organizadas por la Asociación para el Avance de la Enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias Naturales, una agrupación de profesores de matemáticas de la época. En el libro se tratan los tres problemas geométricos clásicos de la antigüedad, con técnicas modernas: el problema de la duplicación del cubo, el de la trisección de un ángulo y el de la cuadratura del círculo.

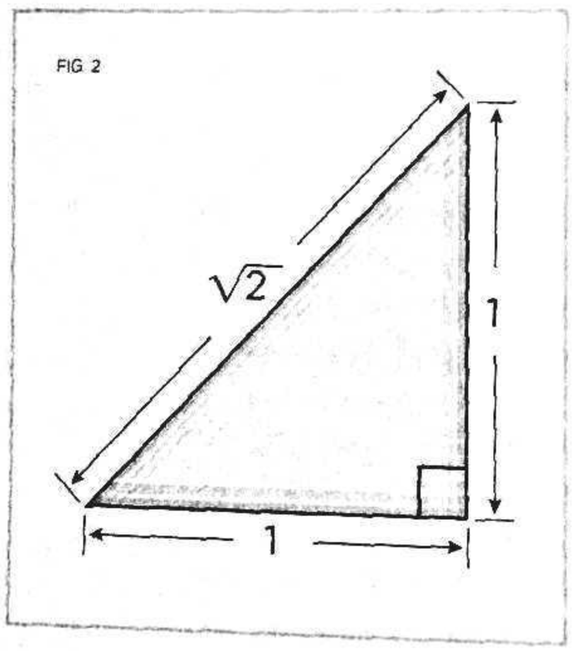
En el año 429 a.C. murió Pericles, gobernador de Atenas, víctima de la epidemia de tifus que hacía estragos en la ciudad. Los habitantes de Atenas decidieron ir a Delfos a consultar al Oráculo para que les ayudase a detener la epidemia. La respuesta del Oráculo fue que debían construir un nuevo altar en forma de cubo, cuyo

volumen duplicase el del altar que ya existía. Los habitantes intentaron cumplir los requerimientos del Oráculo, pero la epidemia no se detuvo. Esta situación representa el problema matemático siguiente: dado un cubo de lado 1 y, por tanto, de volumen 1, construir, mediante regla y compás, el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble; la solución implica construir un lado de longitud $\sqrt[3]{2}$.

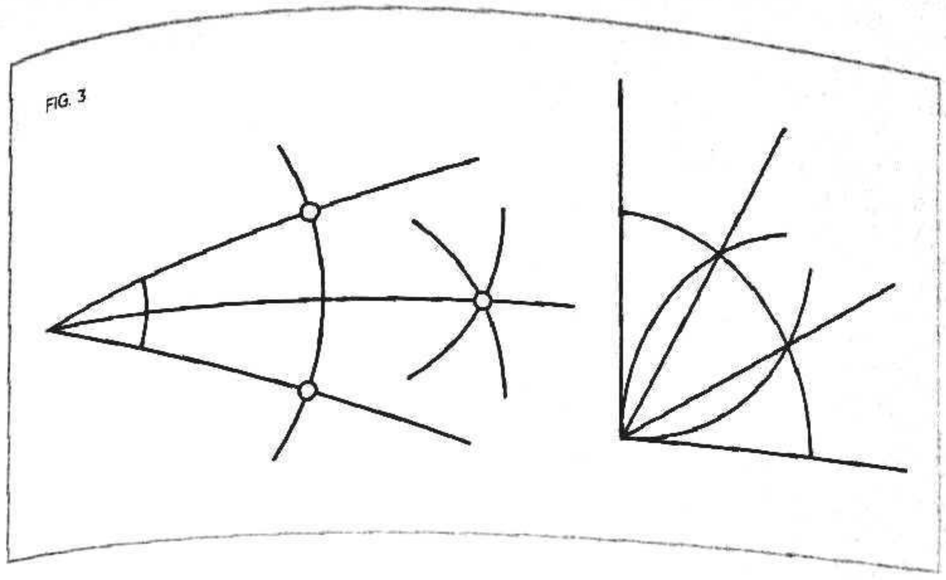
La construcción de $\sqrt{2}$ es fácil. No hay más que construir un triángulo rectángulo con catetos iguales y que tengan, cada uno, longitud 1. El teorema de Pitágoras, que afirma que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, asegura que la longitud de la hipotenusa es precisamente $\sqrt{2}$, como puede verse en la figura 2. Pero, a pesar de la facilidad con la que se construye la raíz cuadrada de 2, la raíz cúbica no se puede construir de ninguna forma parecida. De hecho, el matemático francés Pierre Wantzel (1814-1848) probó en 1837 que no es posible construir el número $\sqrt[3]{2}$ con regla y compás, a pesar de todos los esfuerzos de científicos de todos los tiempos, desde la antigüedad hasta el siglo XIX.

Representación gráfica de $\sqrt{2}$ como hipotenusa de un triángulo rectángulo.

También en 1837 Pierre Wantzel demostró la imposibilidad de la trisección del ángulo, otro de los problemas geométricos de la antigüedad clásica del que habla Felix Klein en su libro. Con la trisección del ángulo ocurre algo similar a la construcción de la raíz cúbica de 2. Es fácil dividir un ángulo en dos partes iguales, es decir, construir la bisectriz de un ángulo cualquiera con regla y compás. Sin embargo, cuando intentamos dividir un ángulo en tres partes iguales el problema no puede resolverse más que en algunos casos particulares, como por ejemplo en el caso de un ángulo recto (figura 3).



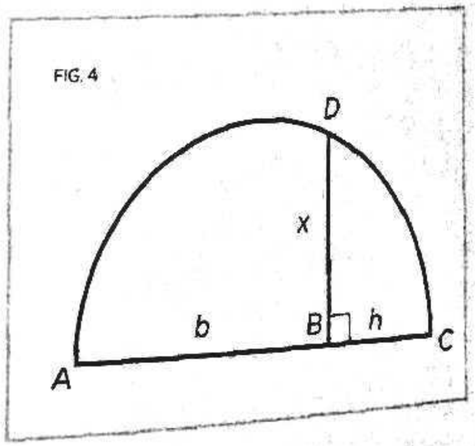
Wantzel había utilizado para las demostraciones de la imposibilidad tanto de la construcción de la raíz cúbica de 2 como de la trisección de un ángulo ideas de la teoría de Galois.



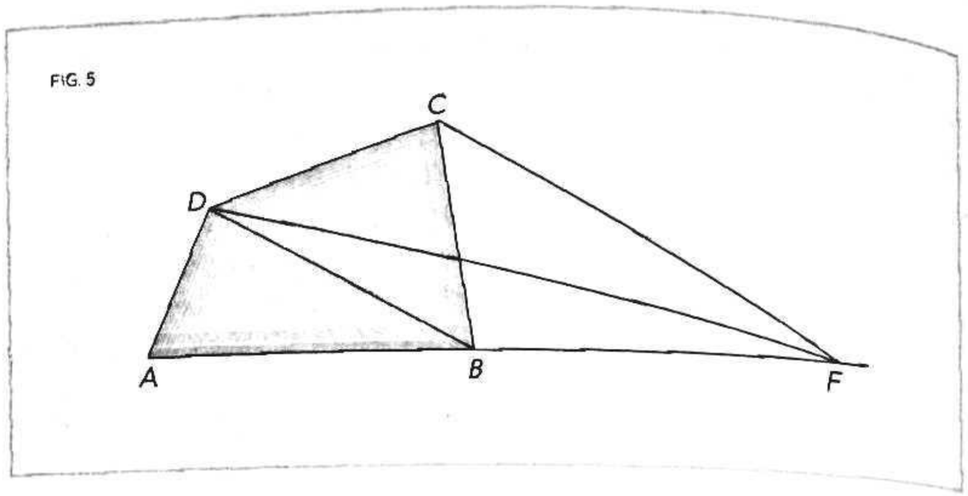
Construcción de la bisectriz de un ángulo (izquierda) y trisección de un ángulo recto (derecha).

También estudió cómo pueden construirse polígonos regulares con regla y compás, un problema en el que ya había trabajado Gauss. Llama la atención, sin embargo, que Felix Klein no lo citara en su libro y sí citara a otros autores. Aunque es probable que no conociese el trabajo de Wantzel. También sorprende que la primera vez que alguien citó el artículo de Wantzel lo hiciera cincuenta años después de su publicación, concretamente en un artículo y un libro publicados en español, en 1887, por el matemático y premio Nobel de Literatura José Echegaray (1832-1916), en los que habla del «método Wantzel para conocer si un problema puede resolverse con la regla y el compás».

El tercero de los problemas que trata Klein en su libro es el de la cuadratura del círculo. Los griegos sabían cómo construir un cuadrado cuya área fuese igual a la de un polígono cualquiera dado. Por ejemplo, si se quiere construir un cuadrado con área igual a la de un paralelogramo cuya base b y altura h son conocidas, es necesario construir un cuadrado con lado x, que verifique la ecuación $x^2 = bh$. Se trata entonces de construir un segmento de longitud x. Para ello se puede proceder como se muestra en la figura 4.



El área del cuadrilátero *ABCD* es igual al área del triángulo *AFD*.



En primer lugar se dibuja una semicircunferencia con diámetro $b+h$. Por el punto B se traza una perpendicular al diámetro hasta tocar a la semicircunferencia en el punto D y se obtiene la longitud del lado del cuadrado, x. El triángulo que forman los puntos ADC es rectángulo, y un teorema de la geometría elemental, el «teorema de la altura», afirma que, en la construcción realizada se verifica $x^2 = bh$.

Los griegos sabían incluso resolver el problema más complicado de construir un cuadrado cuya área fuese igual a la de un cuadrilátero cualquiera dado. A partir del cuadrilátero de vértices $ABCD$ de la figura 5, se dibuja la diagonal DB. Por el punto C se traza una paralela a la diagonal DB. Finalmente se dibuja DF. De esta manera, se obtiene un triángulo AFD cuya área es igual a la del cuadrilátero inicial.

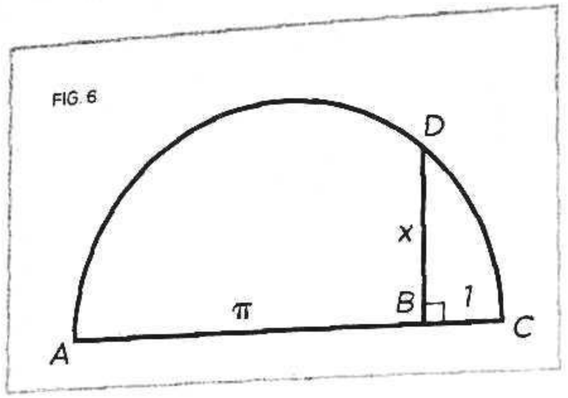
Ahora el problema se reduce a construir un cuadrado cuya área sea igual a la de un triángulo con dimensiones conocidas. Para ello pueden utilizarse la ecuación $x^2 = \frac{1}{2}bh$ y la construcción utilizada en el primer caso.

Para los griegos el paso siguiente era evidente. Dado que se puede construir un cuadrado cuya área es igual a la de un polígono, debería ser posible resolver el mismo problema para una figura con el contorno curvo más simple posible, el círculo. Si se parte de un círculo de radio 1, su área es exactamente π unidades cuadradas. La ecuación que hay que utilizar ahora es $x^2 = \pi = \pi \cdot 1$. Se utiliza entonces la construcción de la figura 6.

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA.
Página de los *Protocolos*, un vasto registro manuscrito de las clases y las conferencias de Felix Klein.

FOTO SUPERIOR DERECHA.
Retrato de Felix Klein obra del pintor y grabador judeo-alemán Max Liebermann, destacado representante del impresionismo alemán.

FOTO INFERIOR.
Felix Klein, en el centro de la imagen, en el Congreso de Chicago, 1893.



Todo funciona como antes, salvo que ahora es necesario construir un segmento de longitud π unidades. Este es el punto en el que no se puede continuar el problema, salvo que se sepa determinar con exactitud el valor del número π. Los sucesivos intentos de resolver este problema o de aproximarse a la solución, que sería más correcto, no dieron fruto, pero proporcionaron numerosas técnicas nuevas para aproximar el número π. La incapacidad de construir el número π, es decir, la imposibilidad de cuadrar el círculo, utilizando solo regla y compás, fue demostrada por el matemático alemán Ferdinand Lindemann (1852-1939) en 1882. En este caso, y por obvias razones de cercanía, Klein sí lo mencionó en su libro; de hecho, comienza con la demostración de Lindemann de que el número π es «trascendente», es decir, no se puede obtener como solución de una ecuación algebraica con coeficientes enteros no nulos.

Es muy posible que Felix Klein eligiese estos problemas porque conectaban la matemática de la antigüedad clásica con la investigación matemática reciente. Los tres problemas se habían resuelto solo unos pocos años antes del curso de Klein para profesores de secundaria, sin embargo, llevaban abiertos más de dos milenios. Klein intentaba de esta forma incorporar la investigación matemática reciente a los conocimientos de los docentes de matemáticas, no para que los hiciesen estudiar a sus alumnos, sino porque estaba convencido de que quienes enseñan deben tener siempre una visión más amplia, y no solo restringida a aquello que se supone que deben enseñar.

LA IDEA DE FUNCIÓN Y EL CÁLCULO EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

Klein era partidario de que los profesores conocieran la matemática clásica, y un buen ejemplo de ello lo constituyen los cursos

que impartió sobre temas de geometría, pero también le interesaba integrar poco a poco en los programas de enseñanza los últimos avances y conceptos matemáticos, o al menos aquellos que pudieran ser entendidos sin tener que profundizar demasiado en aspectos abstractos.

> «Conviene que todos los ciudadanos entren en contacto con la verdadera matemática, que es método, arte y ciencia, muy distinta de la calculatoria, que es técnica y rutina.»
>
> — Felix Klein.

Uno de los conceptos matemáticos cuyo desarrollo se acababa de completar en la época de Klein es el de «función». Aunque la moderna definición del concepto se debe a Dirichlet, y si bien en aquella época se trataba de una noción utilizada solo por los investigadores matemáticos, hoy en día es una idea que utilizan a diario estudiantes de diferentes niveles, universitarios y no universitarios, en todo el mundo. Felix Klein fue el primer matemático que, de una manera completamente audaz para su época, abogó por la introducción de este concepto en la enseñanza.

En el primer volumen de *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, después de hacer un recorrido histórico sobre cómo se gestó la idea de función y hasta llegar al estado en que se encontraba en 1908, Klein afirmaba:

> En relación con esto querría decir que no solo es discutible, sino que es incluso deseable que los colegios vayan por detrás durante un cierto período de tiempo, al menos varias décadas, de los avances más recientes en nuestra ciencia, es decir, que se produzca una cierta histéresis. Pero la histéresis que existe actualmente es desgraciadamente en algunos aspectos mucho mayor, de más de un siglo, pues los colegios, en su mayor parte, ignoran todos los desarrollos desde los tiempos de Euler… Deseamos que el concepto general de función actúe como fermento en toda la enseñanza secundaria. Pero no debe introducirse, por supuesto, por medio de definiciones abstractas sino como algo que está vivo y que le pertenece, mediante ejemplos elementales, como se encuentran en abundancia en Euler.

Klein no solo fue el responsable de que en prácticamente todos los países europeos de la época se empezase a introducir el concepto de función, sino que también es el causante de que, hoy en día, todos los estudiantes acaben su enseñanza preuniversitaria con unos mínimos conocimientos de cálculo infinitesimal. En la introducción de su libro ya declaraba su intención con respecto a estos aspectos:

> Hay que poner el concepto de función en el centro de la enseñanza porque de todos los conceptos matemáticos de los dos últimos siglos este desempeña el papel fundamental cuando se emplea el pensamiento matemático. Introduciremos en la enseñanza, tan temprano como sea posible y haciendo uso constante de los métodos gráficos, la representación de las relaciones funcionales en el sistema (x, y) que hoy se utiliza inevitablemente en todas las aplicaciones prácticas de las matemáticas. Para hacer que esta innovación sea posible, prescindiremos de muchos temas de enseñanza tradicionales que, aun interesantes en sí mismos, parecen menos esenciales desde el punto de vista de su significado en relación con la cultura moderna. Un fuerte desarrollo de la percepción espacial será, sobre todo, un punto primordial. En sus niveles superiores [de la enseñanza secundaria], sin embargo, la enseñanza debe adentrarse suficientemente en los elementos del cálculo infinitesimal de modo que tanto el naturalista como el especialista en seguros terminen la enseñanza secundaria con las herramientas matemáticas que les serán luego indispensables.

LA GRAN ENCICLOPEDIA DE KLEIN

Felix Klein escribió muchos libros, algunos de los cuales han llegado a convertirse en clásicos. Pero, sin duda, su trabajo editorial más ambicioso fue la edición de una enciclopedia de matemáticas y sus aplicaciones. Fue un proyecto en el que comenzó a trabajar en 1894 y que se llegaría a convertir en la *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* (*Enciclopedia de las ciencias matemáticas, incluyendo sus aplicaciones*). La inclusión de las aplicaciones en la enciclopedia responde a la reiterada convicción de Klein de que la mejor manera de entender la importancia de las matemáticas es a través de sus aplicaciones.

> «Pretender desterrar las aplicaciones de las matemáticas equivaldría a querer buscar la esencia de un animal vivo únicamente en su esqueleto, sin tener en cuenta los músculos, los nervios y los tejidos, y los instintos; esto es, la parte más viva del animal.»
>
> — Felix Klein.

Con respecto a la idea de la enciclopedia, cuando Klein expresó su deseo de iniciar el proyecto, su justificación fue que:

> El progreso de las matemáticas es como la construcción de una gran torre; a veces el aumento de su altura es evidente, en otras ocasiones, aparentemente, la obra parece haberse parado; son los momentos de revisión general, cuando el avance, aunque invisible desde fuera, es aún real, y consiste en la consolidación y el asentamiento. Así es el período actual, lo que quiere decir que es el momento de revisar el estado del edificio tal y como existe en el presente.

El primer volumen de la enciclopedia fue publicado en 1898 y el último en 1933. Son en total seis volúmenes, distribuidos en unos 30 tomos, que ocupan más de 20 000 páginas, y fue publicada en versión alemana y, después, en versión francesa, presentada en el Tercer Congreso Internacional de Matemáticos en 1904.

El jefe del proyecto fue el antiguo estudiante de Klein Walther von Dyck (1856-1934), que también había editado las obras completas de Kepler. Von Dyck lo dio a conocer explicando que: «La misión es presentar una exposición simple y concisa, tan completa como sea posible, del cuerpo de las matemáticas contemporáneas, junto a una detallada bibliografía y al desarrollo histórico de los métodos matemáticos desde el principio del siglo XIX». Sin

embargo, Klein estuvo implicado en todo el plan global y el diseño de todo el proyecto, razón por la que, a veces, se le llama «Enciclopedia de Klein».

Los seis volúmenes tienen por títulos: «Aritmética y álgebra», «Análisis», «Geometría», «Mecánica», «Física», y el sexto tiene dos secciones, una titulada «Geodesia y geofísica» y otra dedicada a la «Astronomía». Felix Klein coordinó personalmente el de «Mecánica», y su amigo y colaborador Arnold Sommerfeld, el de «Física». De hecho, ambos realizaron numerosos viajes para conseguir la implicación en el proyecto de científicos tales como Hendrik A. Lorenz (1853-1928), Ludwig Boltzmann (1844-1906) o Wolfgang Pauli (1900-1958), entre otros.

FELIX KLEIN EN ESTADOS UNIDOS

La Exposición Universal de Chicago, también conocida por el nombre de World's Columbian Exposition, se desarrolló en Chicago, Estados Unidos, entre mayo y octubre de 1893. El tema era el cuarto centenario del descubrimiento de América por parte de Cristóbal Colón. Chicago se había impuesto como ciudad anfitriona del evento frente a Nueva York, Washington D.C. y San Luis. La exposición, como siempre ocurre con los eventos de este tipo, tuvo un profundo efecto sobre la arquitectura, la cultura y la pujante actividad industrial estadounidense.

Como parte de las celebraciones de la Exposición Universal tuvo lugar el Congreso Internacional de Matemáticos, que se celebró entre el 21 y el 26 de agosto del mismo año. El Congreso de Chicago se realizó cuatro años antes del Primer Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) de la era moderna, que se desarrolló en Zúrich, Suiza, en 1897, y que marca la era moderna de la colaboración internacional en investigación matemática. De hecho, el Congreso de Chicago, gracias en parte a la visita de Klein, representa la incorporación de Estados Unidos a la investigación matemática internacional. Felix Klein no asistió al Congreso como un matemático que fuese a dar una conferencia sin más, sino que había sido enviado por el ministro prusiano de Educación como representante oficial del gobierno.

Además de su conferencia en el Congreso, también ofreció una serie de ponencias durante dos semanas consecutivas en la Universidad Northwestern, en Evanston, en el estado de Illinois, las denominadas *Evanston Colloquium Lectures*, que tuvieron lugar a partir del 28 de agosto, recién acabado el Congreso de Chicago.

Durante el primer día del Congreso, Klein pronunció una conferencia titulada «El estado actual de las matemáticas», que reflejaba su punto de vista sobre las matemáticas:

> Cuando contemplamos el desarrollo de las matemáticas durante el siglo XIX, encontramos que ha ocurrido algo similar a lo que ha ocurrido en otras ciencias. Los grandes investigadores que nos han precedido, Lagrange, Laplace y Gauss, fueron lo suficientemente capaces como para abrazar todas las ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. En particular, la astronomía y las matemáticas fueron durante ese período inseparables.
> Con la generación siguiente, sin embargo, se ha manifestado una tendencia a la especialización. Tampoco son menospreciables los nombres de sus primeros representantes: Abel, Jacobi, Galois y el gran geómetra, Poncelet, y tampoco sus logros individuales. Pero el desarrollo de la ciencia empieza a superar su propósito original y amenaza con sacrificar su unidad y dividirse en ramas.

Durante su conferencia Klein también hizo referencia a que mientras que, en el pasado, los logros matemáticos eran fundamentalmente el resultado del esfuerzo individual, la situación presente, y el futuro, pasaba por la colaboración entre científicos: «Una diferencia entre la etapa anterior y el presente es que lo que antes era conseguido por una única mente, ahora hay que lograrlo aunando esfuerzos y mediante la cooperación». El último día del Congreso dio una disertación, más especializada, sobre el desarrollo de la teoría de grupos durante los últimos veinte años.

Después, Klein se trasladó a Evanston y durante doce días consecutivos impartió cada uno de los días una conferencia con títulos y contenidos distintos en las que trazó una semblanza de

los avances matemáticos de los últimos tiempos y el estado actual. Klein habló en inglés ante una audiencia de matemáticos norteamericanos. Las conferencias fueron editadas como un libro, publicado en 1894, titulado *Lecciones de matemáticas* o *The Evanston Colloquium Lectures*, a partir de las notas de uno de los asistentes.

Este tipo de conferencias y publicaciones no hubieran tenido la misma acogida que tuvieron entre los matemáticos de las universidades norteamericanas si se hubieran impartido entre la comunidad matemática alemana, que por aquella época no veía con buenos ojos esta «popularización» de la ciencia. Klein era partidario de este tipo de publicaciones, es decir, artículos o libros en los que se muestra el estado de la ciencia o de un campo de investigación a no especialistas. En este sentido también fue un precursor, ya que hoy en día estos artículos aparecen en multitud de revistas y, precisamente, son muy apreciados por la comunidad científica. La última de las conferencias no estaba destinada a matemáticos sino a estudiantes de matemáticas y llevaba por título «El estudio de las matemáticas en Gotinga». En ella animó a los alumnos estadounidenses a que estudiasen a Gotinga, algo que muchos hicieron. Las conferencias de Evanston constituyen, sin duda, la mejor biografía científica del propio Klein.

«NUNCA SEAS ABURRIDO»

La vida y la obra de Felix Klein constituyen un caso bastante singular dentro de la historia del pensamiento científico. El lugar y la época en la que vivió contribuyeron decisivamente a ello. La segunda mitad del siglo XIX y los comienzos del siglo XX son momentos en los que la matemática se transforma completamente; de la matemática clásica e individualista de Newton, Leibniz y Gauss, tal y como afirmaba el propio Klein, surge una nueva ciencia. Felix Klein fue capaz de anticiparse a cómo se iba a moldear la investigación científica del siglo XX: Klein estaba seguro de que en el futuro no sería posible que un único individuo liderase la investigación de toda una generación, sino que las nuevas teorías y los nuevos problemas serían fruto del trabajo colectivo de muchas mentes brillantes que colaborasen e intercambiasen ideas.

Felix Klein supo anticiparse a la importancia que tendrían los grupos y los centros de investigación en los que participasen especialistas de diversas disciplinas; también supo entender la importancia que tenían las publicaciones científicas y didácticas como motores de la transformación, la importancia que tendrían las aplicaciones y las relaciones entre las matemáticas y otras ciencias y la tecnología; supo entender además lo importante que era, por ejemplo, la relación entre la ciencia y la industria. Reunía en una misma persona las dotes de científico, organizador, escritor y trabajador incansable, y fue sobre todo, un excelente profesor, que siempre se preocupó por enseñar de una manera clara, usando la intuición, adaptándose a la audiencia que tenía delante, estuviera esta formada por estudiantes de ciencias, de ingenierías, colegas científicos o por profesores de matemáticas elementales. Gracias a su influencia se llevaron a cabo reformas en la enseñanza de las matemáticas elementales que continúan hoy vigentes. Los estudiantes que llegan a la universidad conocen los rudimentos del cálculo infinitesimal gracias a Klein. No es habitual que hoy en día ningún tipo de reforma importante en la enseñanza sea válida después de dos décadas como mucho, la reforma de Klein sigue vigente más de cien años después de que él la concibiera.

Felix Klein se retiró en 1913 pero siguió enseñando matemáticas, ciencia e historia de la ciencia a círculos reducidos de estudiantes y colegas. Fruto de esas charlas en su casa, surgió un último libro de Klein, *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*, publicado en 1926, un año después de su fallecimiento, gracias a Richard Courant y a una de sus hijas, la matemática y física Elisabeth Staiger (1888-1968), nacida en Gotinga y fallecida en Madrid. Fue el último proyecto en el que Klein trabajó y que, según Courant, formaba parte de un plan más ambicioso, como todo lo que proyectaba Felix Klein.

Felix Klein siempre tuvo nuevas ideas hasta el final, siempre encontraba una nueva forma de explicar las cosas. Grace Chisholm explicaba que cuando daba clases a otros profesores, siempre les decía: «Nunca seas aburrido».

Lecturas recomendadas

ALMIRA, J. M., SABINA DE LIS, J. C., *Hilbert: matemático fundamental*, Madrid, Nivola, 2007.

BOYER, C. B., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 2007.

DU SAUTOY, M., *Simetría. Un viaje por los patrones de la naturaleza*, Barcelona, Acantilado, 2008.

GÓMEZ URGELLÉS, J., *Cuando las rectas se vuelven curvas. Las geometrías no euclídeas*, Barcelona, RBA, 2016.

GRAY, J., *Ideas de espacio*, Barcelona, Biblioteca Mondadori, 1992.

—: *El reto de Hilbert*, Barcelona, Crítica, 2005.

HERSH, R., JOHN-STEINER, V., *Matemáticas: una historia de amor y odio*, Barcelona, Drakontos, 2012.

KLEIN, F., *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*, Barcelona, Crítica, 2006.

—: *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, Madrid, Nivola, 2006.

LEDERMAN, L. M., HILL, C. T., *La simetría y la belleza del universo*, Tusquets Editores, 2006.

LIVIO, M., *La ecuación jamás resuelta*, Barcelona, Ariel, 2007.

RUELLE, D., *El cerebro de los matemáticos*, Barcelona, Editorial Antoni Bosch, 2012.

Índice

Abel, Niels Henrik 26
Alhambra 20
Aristóteles 18, 65
axioma 44-48, 57

Baltimore 87, 88
banda de Moebius 68, 69, 71
Boltzmann, Ludwig 146
Bolyai, Farkas 49
Bolyai, János 8, 34, 48-51
Born, Max 108, 109, 128, 130, 131
botella de Klein 69-72
Brill, Ludwig 72-75

Cantor, George 116
Cauchy, Augustin Louis 25
Cayley, Arthur 32, 34, 37, 103
Chisholm, Grace 114-116, 118, 127, 149
Clebsch, Alfred 11, 31, 32, 37, 56, 58, 62, 85, 100, 130
Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI) 123-125
Congreso Internacional de Matemáticos 106, 125, 145, 146
Courant, Richard 105, 149

Da Vinci, Leonardo 55
Darboux, Gaston 37, 38, 83
Dedekind, Richard 94, 99
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune 11, 96-99, 101, 119, 130, 143
disco
  de Klein 57
  de Poincaré 83
duplicación del cubo 137, 141
Durero, Alberto 55
Düsseldorf 27

Echegaray, José 139
ecuación
  de segundo grado 23, 24, 84
  de quinto grado 8, 10, 26, 84-87
Einstein, Albert 87, 109, 110, 112, 119, 134
elementos de Euclides 8, 43, 44, 46, 52
elipse 57, 59, 61, 86

«Enciclopedia de Klein» 12, 144, 146
Erlangen, programa de 9, 35, 52, 58-62, 68, 89, 109
Euclides 8, 9, 41-44, 46, 49-52, 98
Euler, Leonhard 78, 107, 143
Exposición Universal de Chicago 146-147

función
  compleja 79, 80

Galois, Évariste 8, 23, 25-27, 32, 37, 73, 84-87, 138, 147
Gauss, Carl Friedrich 11, 48-54, 93-96, 98, 99, 101, 114, 115, 119, 127, 135, 139, 147, 148
geometría
  elíptica 48, 50, 52, 57
  hiperbólica 48, 49, 51, 56, 57, 83
  no euclídea 48-58, 81, 95, 109
  parabólica 48
  proyectiva 34, 54-57, 60
Germain, Sophie 94, 96, 114
grupo
  de Klein 103, 114
  de Simetría 9, 61, 85, 103
Gymnasium 27, 28, 126, 128, 137

Hegel, Anne 73
Heisenberg, Werner 119
Hilbert, David 11, 32, 102-104, 111, 116, 117, 119, 128, 130, 131
hipótesis de Riemann 98, 99

icosaedro 10, 84-86
integral 12, 37, 105, 114, 131, 136, 137
invariante 9, 23, 31, 32, 60, 68, 80, 109

Jordan, Camille 27, 32, 37, 119

Kant, Immanuel 58, 107
Königsberg 33, 107, 108
Kovalevskaya, Sofia 32, 115, 116

Lambert, Johann Heinrich 47
Legendre, Adrien-Marie 46-48
Leipzig 9, 10, 35, 73, 88, 89, 101, 104
Lie, Sophus 8, 9, 27, 34-38, 61, 62, 85, 87-89, 101
Lindemann, Ferdinand 141, 142
Lobachevski, Nikolái 8, 34, 48, 50, 51, 53, 54, 56, 58

matemática aplicada 7, 59, 96, 108
Mathematische Annalen 11, 32, 56, 62, 73, 100
mecánica cuántica 11, 108, 112, 119, 131
Minkowski, Hermann 11, 107-109, 111, 116, 128, 130, 131
Múnich 9, 62, 72, 73

Neumann, John von 32, 100, 119
Noether, Emmy 114-117, 130
números complejos 10, 78, 79, 81, 93, 98

Pauli, Wolfgang 146
Planck, Max 9, 73, 131
Platón 19, 43, 86, 113
Plücker, Julius 28, 30, 31
postulado de las paralelas 8, 49
Primera Guerra Mundial 117
Privatdozent 56, 106, 117
Proclo 44
Protocolos 130, 132, 141
puntos del infinito 56, 57, 83

Riemann, Bernhard 8, 11, 34, 48, 50, 54-57, 82, 94, 98-101, 119
rotación 20, 21, 31, 113
Runge, Carl 9, 11, 73, 108, 111, 131

Saccheri, Girolamo 44, 47, 50
Segunda Guerra Mundial 125
simetría 8, 17-20, 23, 26-28, 31, 87, 103
sólidos platónicos 86
Stolz, Otto 34

Tales de Mileto 41, 65
teorema de Pitágoras 53, 55, 76, 138
teoría
  de conjuntos 116, 127
  de grupos 8, 10, 19, 27, 35, 61, 73, 81, 85, 87, 101, 147
  de la relatividad 54, 87, 105, 116
  matemática de la peonza 112, 113
topología 31, 68
toro 66-70

último teorema de Fermat 36, 96, 110-112
Unión Matemática Internacional (IMU) 123, 125

Wantzel, Pierre 138, 139, 141
Weierstrass, Karl 32-34, 88, 100, 102, 114
Weyl, Hermann 7, 19, 34, 87
Wiles, Andrew 36, 112
Wolfskehl, Paul 100-112